<u>Solution de l'équation de Laplace en coordonnées toroïdales</u> *<u>(η,ϑ,φ)</u>* ***<u>avec conditions aux limites Dirichlet, Neumann ou Robin par la méthode de séparation des variables</u>***

Le système toroïdal (η,ϑ,φ) (3D) est défini par le changement de variable :

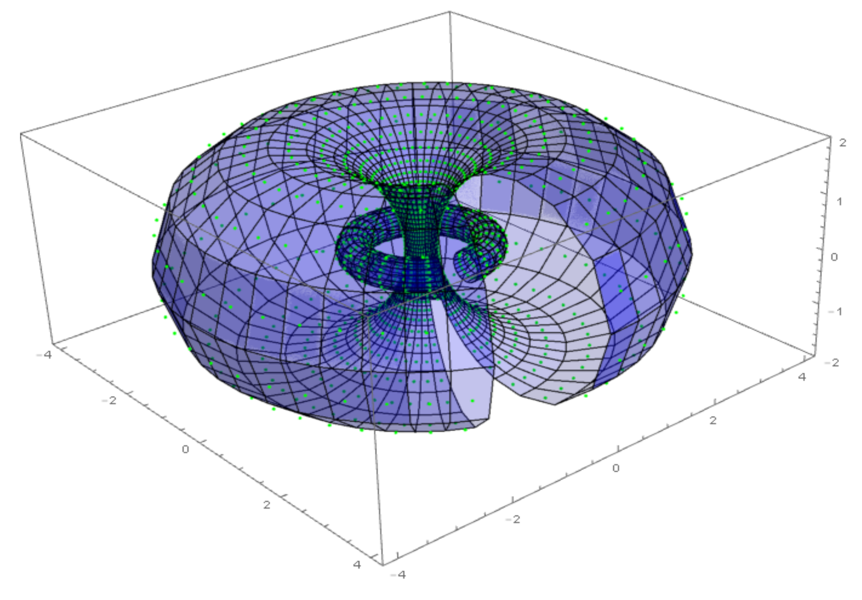
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \\ y = \dfrac{a\,Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \\ z = \dfrac{a\,Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \end{array}\right\} \quad avec \quad 0 \le \eta < +\infty \quad -\pi < \theta \le \pi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

où a fixe la dimension du rayon de l'anneau du tore
η désigne la distance à l'intérieur de la section du tore
ϑ l'angle polaire dans la section du tore
φ l'angle sur l'anneau du tore

Typiquement nous recherchons la solution du problème aux limites intérieur en coordonnées sphéroïdales allongées sur un espace bornée dans les limites :

$\eta \in [0,+\infty] \;\; ; \;\; \vartheta \in [-\pi,\pi] \;\; ; \;\; \varphi \in [0,2\pi]$ *soit* $\eta \in [\eta_1,\eta_2] \;\; ; \;\; \vartheta \in [\vartheta_1,\vartheta_2] \;\; ; \;\; \varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$

A noter que l'intérieur d'un tore en coordonnées cartésiennes correspond à un problème extérieur de Dirichlet (en coordonnées toroïdales), soit $\eta \in [\eta_0,+\infty] \;\; ; \;\; \vartheta \in [-\pi,\pi] \;\; ; \;\; \varphi \in [0,2\pi]$*, dont voici l'illustration avec l'anneau fin figurant une valeur radiale η tendant vers l'infini, et un rayon de plus en plus faible.*



Tandis que le problème sur le domaine $\eta \in [0,\eta_0] \;\; ; \;\; \vartheta \in [-\pi,\pi] \;\; ; \;\; \varphi \in [0,2\pi]$ *correspond à un problème extérieur au tore en coordonnées cartésiennes.*

Le Jacobien en coordonnées sphéroïdales allongées et la métrique sont :

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = a\frac{Cosh(\eta)Cos(\varphi)\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)-Sinh(\eta)^2 Cos(\varphi)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2} = a\frac{Cos(\varphi)\big(1-Cosh(\eta)Cos(\theta)\big)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = a\frac{Sinh(\eta)Cos(\varphi)Sin(\theta)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -a\frac{Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{Cosh(\eta)Sin(\varphi)\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)-Sinh(\eta)^2 Sin(\varphi)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2} = a\frac{Sin(\varphi)\big(1-Cosh(\eta)Cos(\theta)\big)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = -a\frac{Sinh(\eta)Sin(\varphi)Sin(\theta)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = a\frac{Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)} \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = -a\frac{Sinh(\eta)Sin(\theta)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = a\frac{Cos(\theta)\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)-Sin^2(\theta)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2} = a\frac{Cos(\theta)Cosh(\eta)-1}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{a^3\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2 Sinh(\eta)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^5} = \frac{a^3 Sinh(\eta)}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^3}$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)^2}(d\eta^2 + d\theta^2 + Sinh^2(\eta)d\varphi^2)$$

<u>Formule d'inversion du système de coordonnées toroïdales</u>

Il s'agit de passer du système cartésien vers le système toroïdal. Pour cela plaçons-nous dans un plan méridien ρ, z, ρ étant la distance à l'axe de révolution z. Il est facile de montrer que le système toroïdal est défini de la manière suivante par ce que l'on appelle une fonction de révolution, fonction de la variable complexe $\eta + i\theta$ *:*

$$z + i\rho = i\,a\,Cotanh\left(\frac{\eta + i\theta}{2}\right)$$

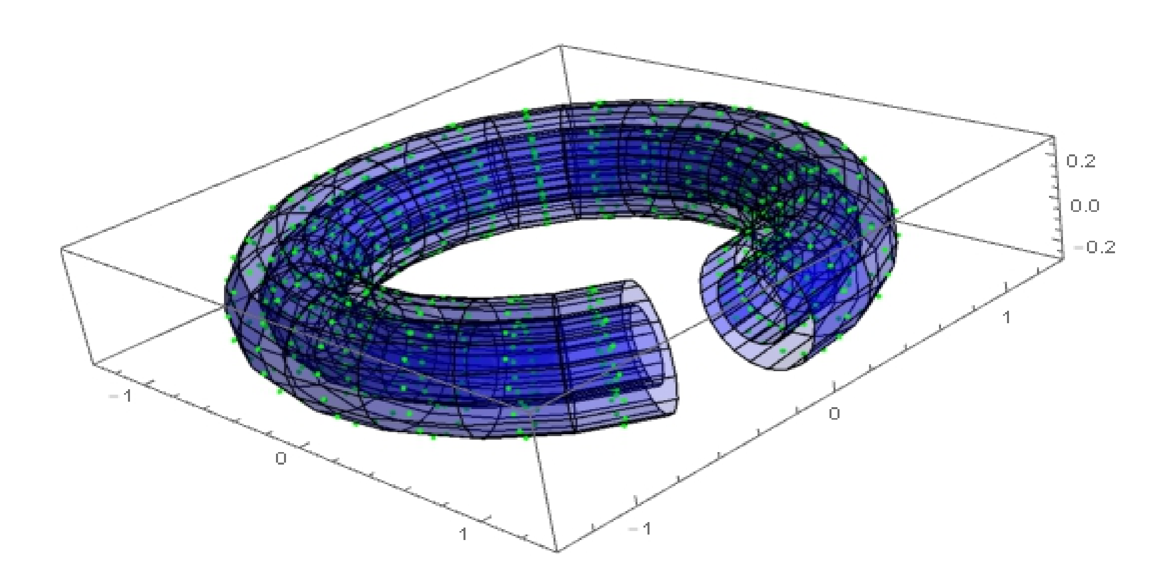
Pour obtenir la formule désirée il suffit d'inverser cette fonction, soit :

$$\eta + i\theta = 2Cotanh^{-1}\left(\frac{\rho - i\,z}{a}\right) = 2\,ArcCotanh\left(\frac{\rho - i\,z}{a}\right)$$

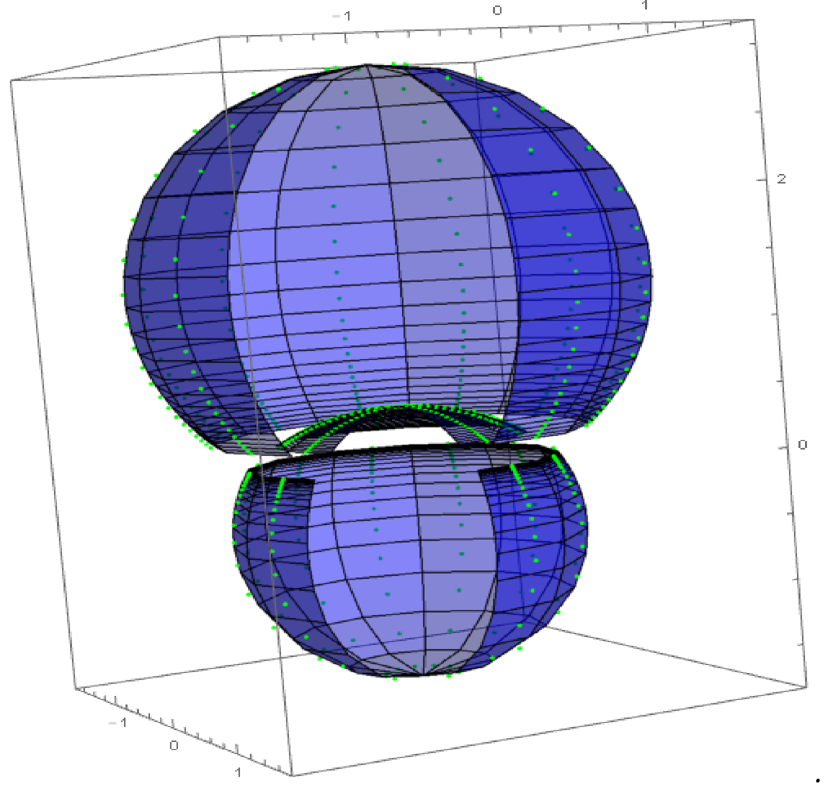
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>Iso-surface du système de coordonnées toroïdales</u>

Voici deux iso-surfaces η=ctse du système toroïdal, comme nous l'avons évoqué les anneaux intérieurs ont une valeur η plus grande.

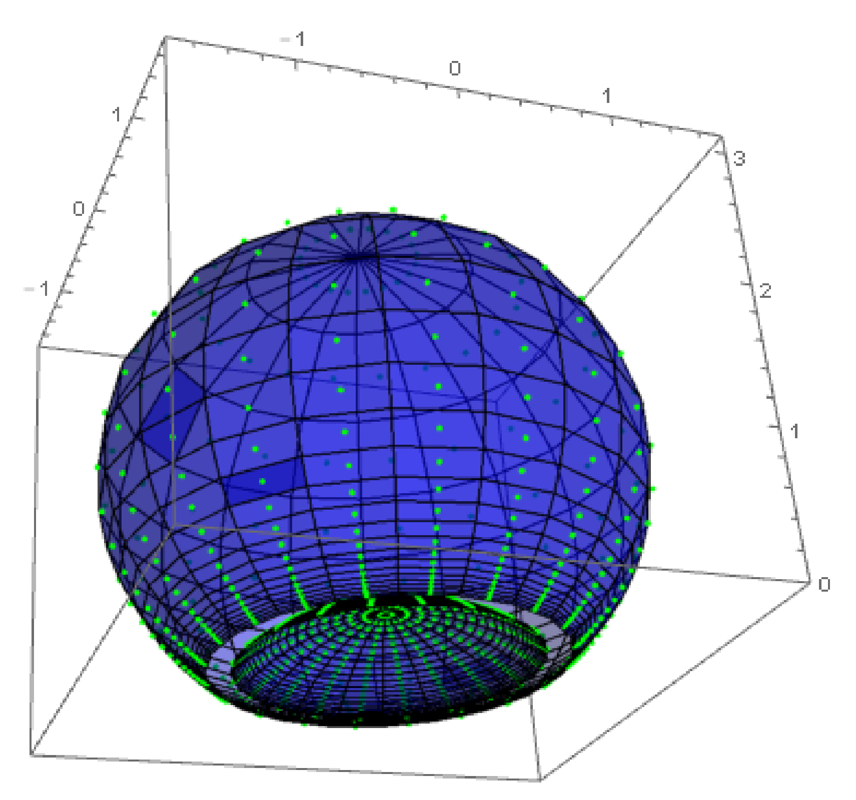


Voici trois iso-surfaces ϑ=π/5, 3π/4, -π/3 du système toroïdal, ce qui permet de modéliser des unions et des intersections de sphères :



La jonction entre les sphères (iso surface ϑ= Cste) se réalise à la limite η→∞.

Voici des iso-surfaces ϑ=π/5, 3π/4, ce qui permet également de modéliser des intersections de sphères :



Là encore la jonction entre les sphères (iso surface ϑ= Cste) se réalise à la limite η→∞.

Valeurs particulières du système toroïdale

La valeur η=0 correspond aux valeurs cartésiennes :

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = \frac{a\,Sin(\theta)}{1 - Cos(\theta)} \quad avec \quad -\pi < \theta \le \pi$$

Cela décrit finalement l'axe z des coordonnées cartésiennes.

La limite η→∞ correspond aux valeurs cartésiennes :

$$x = a\,Cos(\varphi) \quad y = a\,Sin(\varphi) \quad z = 0 \quad avec \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Soit une cercle de rayon a dans le plan (x,y).

Les valeurs ϑ=±π correspond aux valeurs cartésiennes :

$$x = \frac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{1 + Cosh(\eta)} \quad y = \frac{a\,Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{1 + Cosh(\eta)} \quad z = 0 \quad avec \quad 0 \le \eta < +\infty \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Ce qui décrit l'intérieur d'un disque de rayon a centré à l'origine dans le plan (x,y).

La valeurs ϑ=0 correspond aux valeurs cartésiennes :

$$x = \frac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta) - 1} \quad y = \frac{a\,Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta) - 1} \quad z = 0 \quad avec \quad 0 \le \eta < +\infty \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Ce qui décrit l'extérieur d'un disque de rayon a centré à l'origine dans le plan (x,y).

Comportement des iso-surfaces $\vartheta=\vartheta_0$

Les iso-surface $\vartheta=\vartheta_0$, forment des sphères , comme suit :

$$x^2+y^2=\frac{a^2\,Sinh^2(\eta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta_0))^2}\quad\left(z-a\frac{Cos(\theta_0)}{Sin(\theta_0)}\right)^2=\frac{a^2}{Sin^2(\theta_0)}\frac{(1-Cos(\theta_0)Cosh(\eta))^2}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta_0))^2}$$

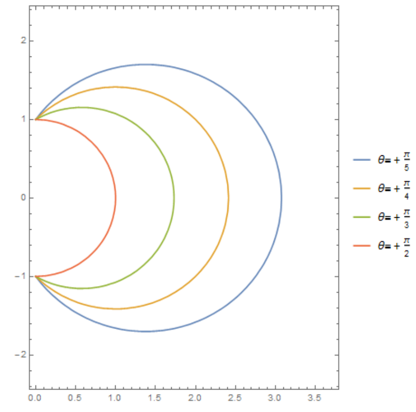
$$x^2+y^2+\left(z-a\frac{Cos(\theta_0)}{Sin(\theta_0)}\right)^2=\frac{a^2}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta_0))^2\,Sin^2(\theta_0)}\left(Sin^2(\theta_0)Sinh^2(\eta)+(1-Cos(\theta_0)Cosh(\eta))^2\right)$$

$$=\frac{a^2}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta_0))^2\,Sin^2(\theta_0)}\left(Cos^2(\theta_0)+Cosh^2(\eta)-2Cos(\theta_0)Cosh(\eta)\right)=\frac{a^2}{Sin^2(\theta_0)}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\left(z-a\frac{Cos(\theta_0)}{Sin(\theta_0)}\right)^2=\frac{a^2}{Sin^2(\theta_0)}$$

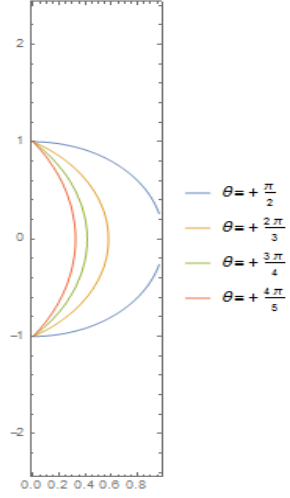
.

Ces sphères ne sont pas complètes, limitées par le disque de rayon a centré à l'origine dans le plan (x,y). La fonction Sin(ϑ_0) étant croissante pour les valeurs $\vartheta=\vartheta_0$ €[0,π/2], on voit que les rayons des sphères s'amoindrissent successivement. Chaque sphère est alors englobée par la précédente, jusqu'à la sphère centrée à l'origine de rayon minimum a pour ϑ_0= π/2. Comme indiqué sur la figure suivante :



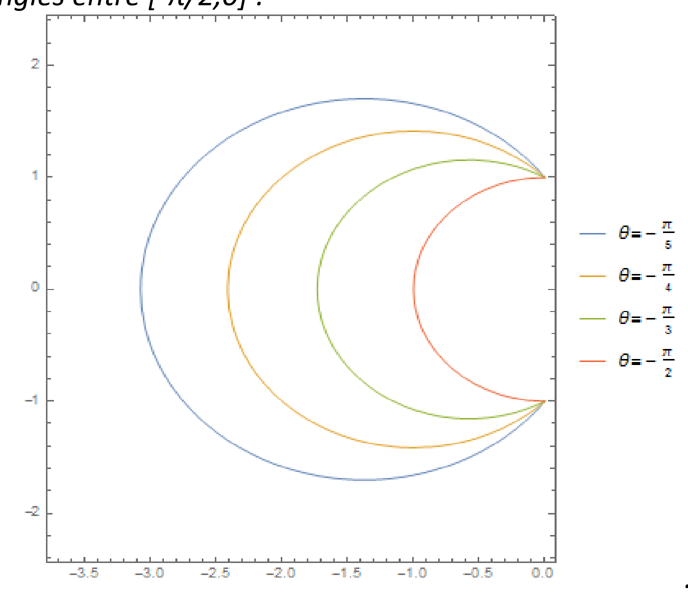
.

Au delà pour ϑ_0 €[π/2,π], les sphères sont successivement plus grande, mais le centre s'éloignant vers des valeur négatives z->-∞, les sphères ne s'englobent plus, mais de rayon grandissant de centre à l'infini négatif et de rayon infini lorsque ϑ_0 -> π (dégénérant en l'extérieur du disque de rayon a pour), comme suit dans la figure suivante :



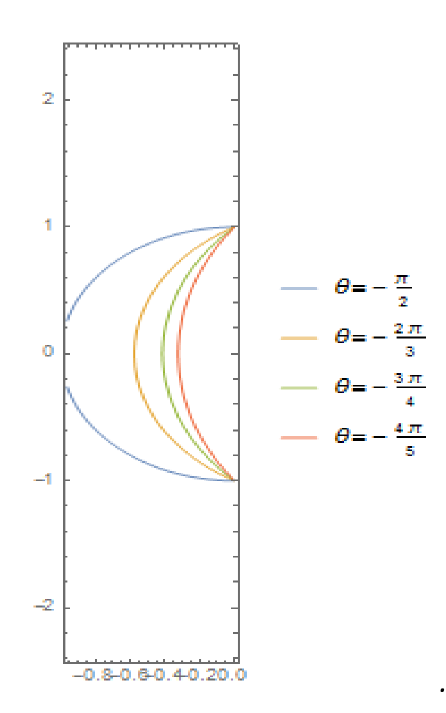
.

Pour ce qui des angles négatifs, on observe le même comportement en fonction de la croissance de la valeur absolu des angles entre [-π/2,0] :



.

Et entre [-π,π/2] :



.

Comportement des iso-surfaces $\eta=\eta_0$

Ces iso-surfaces représentent des anneaux concentriques d'équation cartésienne implicite :

$$x^2+y^2+z^2+a^2=\frac{a^2\,Sinh^2(\eta)+a^2\,Sin^2(\theta)+a^2\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}=\frac{2a^2\,Cosh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

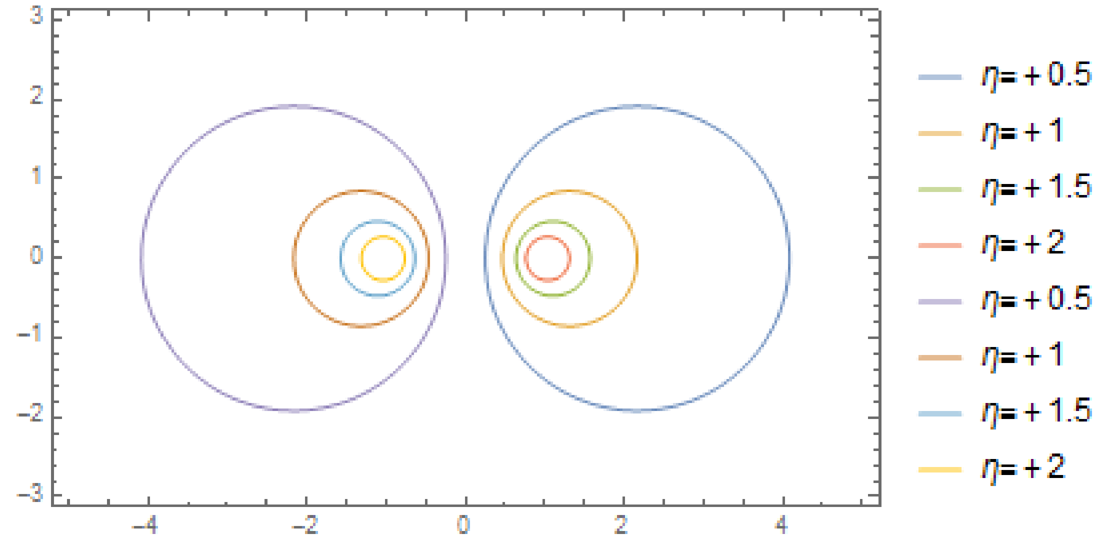
$$x^2+y^2=\frac{a^2\,Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}\Rightarrow\frac{a\,Sinh(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)}=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{a}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{Sinh(\eta)}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+a^2=2a\,Cosh(\eta)\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{Sinh(\eta)}=2a\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+a^2=2a\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}\sqrt{x^2+y^2}$$

Lorsque $\eta=0$ l'anneau se réduit à l'axe z et lorsque $\eta\to\infty$ l'anneau se réduit à un cercle de cente 0 et de rayon a : $x^2+y^2=a^2 \quad z=0$. Ente ces deux extrêmes le rayon de l'anneau ne fait que décroître. De ce fait l'espace extérieur à l'iso-surface $\eta=\eta_0$ est $\eta<\eta_0$ et l'espace intérieur par $\eta>\eta_0$

Le dessin suivant illustre le comportement de ces iso-surfaces :



<u>Singularité du système de coordonnées toroïdales et régularité du gradient</u>

Le jacobien du système de coordonnées toroïdales ne présente pas de valeur nulle sur un domaine bornée, et s'annule à l'infini. En conséquence, il n'y a pas de problème de régularité du gradient:

$$\overrightarrow{Grad\left(T(\eta,\theta,\phi)\right)} = \frac{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)}{a}\left(\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial \eta}\right)\mathbf{I}_{\eta} + \left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial \theta}\right)\mathbf{I}_{\theta} + \frac{1}{Sinh(\eta)}\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi)}{\partial \phi}\right)\mathbf{I}_{\phi}\right)$$

Le Laplacien en coordonnées toroïdales 3D (η,ϑ,φ) s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi) = \frac{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}{a^2 Sinh(\eta)}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta}\right)+ \\ + Sinh(\eta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right)+ \\ + \frac{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}{a^2 Sinh(\eta)^2}\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2}\end{array}\right)$$

Lorsque le problème ne dépend pas de la variable φ, soit est indépendant de la position sur le pourtour de l'anneau, alors le Laplacien en deux dimensions (η,ϑ) s'écrit :

$$\Delta T(\eta,\theta) = \frac{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}{a^2 Sinh(\eta)}\left(\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right)+ \\ + Sinh(\eta)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial \theta}\right)\end{array}\right)$$

L'équation de Laplace dans le système de coordonnées toroïdales n'est pas simplement séparable, soit s'écrivant sous la forme du produit de 3 fonctions des coordonnées indépendantes. Mais en revanche elle est R-séparable. Cela signifie que proportionnellement à une fonction commune des trois coordonnées, elle devient simplement séparable. Il existe actuellement deux procédés de R-Séparabilité pour l'équation de Laplace en coordonnées toroïdales.

Forme traditionnelle de la R-Séparabilité en coordonnées toroïdales (R-Séparabilité-1) :

$$T(\eta,\theta,\varphi) = R(\eta,\theta)\ H(\eta)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)$$

$$R(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}$$

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} H''(\eta) + \dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} H'(\eta) + \left(\dfrac{1}{4} - \alpha_2 - \dfrac{\alpha_3}{Sinh(\eta)^2}\right) H(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \alpha_2 \Theta(\theta) = 0 \\ \Psi''(\varphi) + \alpha_3 \Psi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

en posant les cas suivants

$Cas(1)\quad \alpha_2 = n^2 \ et \ \alpha_3 = m^2 \Rightarrow$

$$Posons \quad \xi = Cosh(\eta) \quad \frac{d\xi}{d\eta} = Sinh(\eta) = \sqrt{Cosh^2(\eta) - 1} = \sqrt{\xi^2 - 1} \quad Sinh^2(\eta) = \xi^2 - 1 \quad \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dH(\xi)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta}\frac{dH(\xi)}{d\xi} = \sqrt{\xi^2 - 1}\,\frac{dH(\xi)}{d\xi}$$

$$\frac{d^2H(\xi)}{d\eta^2} = \frac{d\xi}{d\eta}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dH(\xi)}{d\eta}\right) = \sqrt{\xi^2 - 1}\left(\frac{2\xi}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\frac{dH(\xi)}{d\xi} + \sqrt{\xi^2 - 1}\,\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2}\right) = \left(\xi^2 - 1\right)\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} + \xi\,\frac{dH(\xi)}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \left(\xi^2 - 1\right)\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} + 2\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{1}{4} - n^2 - \frac{m^2}{\xi^2 - 1}\right)H(\eta) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \xi^2\right)\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH(\xi)}{d\xi} + \left(n^2 - \frac{1}{4} - \frac{m^2}{1 - \xi^2}\right)H($$

$$\Rightarrow H(\eta) = A\,P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + B\,Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$\Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,Cos(n\theta) + B\,Sin(n\theta)$$

$$\Psi''(\varphi) + m^2\Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A\,Cos(m\varphi) + B\,Sin(m\varphi)$$

$Cas(2)\quad \alpha_2 = n^2 \ et \ \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ *le système ne dépend plus de* φ

$$H''(\eta) + \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}H'(\eta) + \left(\frac{1}{4} - n^2\right)H(\eta) = 0 \Rightarrow H(\eta) = A\,P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + B\,Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$\Theta''(\theta) + n^2\Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,Cos(n\theta) + B\,Sin(n\theta)$$

$$\Psi''(\varphi) + m^2\Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A + B\varphi$$

$Cas(3)\quad \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ *valeur propre nulle (lorsque le système ne dépend plus que de la coordonnée radiale)*

$$H''(\eta) + \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}H'(\eta) + \frac{1}{4}H(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow H(\eta) = A\,P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + B\,Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) \Rightarrow T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\left(A\,P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + B\,Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

En réduisant à deux dimensions avec un problème ne dépendant pas de l'angle *φ, il suffit de prendre les solutions des deux derniers cas. Cette forme de R-séparabilité est particulièrement adaptée aux problèmes dépendant uniquement des variables η, ϑ, en se réduisant à l'utilisation des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce.*

On peut également α_2 *<0 également possible. En gardant un solide de révolution azimutale complet (soit une constante de séparation azimutale, en φ, égale à m entier), il donnerait des équations de la forme,*

$$Cas(4) \quad \alpha_2 = -\tau^2 \ et \ \alpha_3 = m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} H''(\eta) + \dfrac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} H'(\eta) + \left(\dfrac{1}{4} + \tau^2 - \dfrac{m^2}{Sinh^2(\eta)} \right) H(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) - \tau^2 \Theta(\theta) = 0 \Leftrightarrow \Theta(\theta) = ACosh(\tau\theta) + B \ Sinh(\tau\theta) \\ \Psi''(\varphi) + m^2 \Psi(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\varphi) = ACos(m\varphi) + B \ Sin(m\varphi) \end{array} \right.$$

$$Posons \begin{cases} z = Cosh(\eta) \\ Sinh(\eta) = \sqrt{z^2 - 1} \\ \dfrac{d}{d\eta} = \dfrac{\sqrt{z^2-1}d}{dz} \quad \dfrac{d^2}{d\eta^2} = \dfrac{\sqrt{z^2-1}d\left[\sqrt{z^2-1}\dfrac{d}{dz}\right]}{dz} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R''(\eta) + Cotanh(\eta)R'(\eta) + \left[\frac{1}{4} + \tau^2 - \frac{m^2}{Sinh^2(\eta)}\right] R(\eta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 1)R''(z) + 2zR'(z) + \left[\frac{1}{4} + \tau^2 + \frac{m^2}{1 - z^2}\right] R(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - z^2)R''(z) - 2zR'(z) - \left[\frac{1}{4} + \tau^2 + \frac{m^2}{1 - z^2}\right] R(z) = 0 \Rightarrow R(z) = A \ P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z) + B \ Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R(\eta) = A \ P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) + B \ Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \\ \Theta(\theta) = ACosh(\tau\theta) + B \ Sinh(\tau\theta) \\ \Psi(\varphi) = ACos(m\varphi) + B \ Sin(m\varphi) \end{cases}$$

Ce choix de solutions est adapté à des problèmes aux limites inhomogènes en dimension angulaire ϑ (sur des intersections, union et différence de sphères). On utilise les fonctions coniques de Mehler. Dans ce type de problème, notamment lorsque la géométrie implique toutes les valeurs de la dimension radiale, les transformations de Mehler-Fock sont particulièrement commodes pour construire formellement les solutions sous forme de représentations intégrales, par exemple sur des configurations géométriques comme des lentilles sphériques.

Nouvelle forme de la R-Séparabilité en coordonnées toroïdales (R-Séparabilité-2) :

$$T(\eta,\theta,\varphi)=R(\eta,\theta)\,U(\eta,\theta,\varphi)=R(\eta,\theta)\,H(\eta)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)\quad R(\eta,\theta)=\sqrt{\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}}$$

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi)=0\Leftrightarrow \Delta U(\eta,\theta,\varphi)=\left(Sinh(\eta)\right)^2\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}\right)+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{U(\eta,\theta,\varphi)}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(Sinh(\eta)\right)^2\left(H''(\eta)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)+\Theta''(\theta)H(\eta)\Psi(\varphi)\right)+\Psi''(\varphi)H(\eta)\Theta(\theta)+\frac{H(\eta)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(Sinh(\eta)\right)^2\left(\frac{H''(\eta)}{H(\eta)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right)+\frac{1}{4}=\alpha_3\quad et\quad -\frac{\Psi''(\varphi)}{\Psi(\varphi)}=\alpha_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{H''(\eta)}{H(\eta)}-\frac{1}{\left(Sinh(\eta)\right)^2}\left(\alpha_3-\frac{1}{4}\right)=\alpha_2\quad et\quad -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\alpha_2$$

$$\Delta U(\eta,\theta,\varphi)=0\Rightarrow\begin{cases}\left(Sinh(\eta)\right)^2\left(H''(\eta)-\alpha_2 H(\eta)\right)+\left(\frac{1}{4}-\alpha_3\right)H(\eta)=0\\ \Theta''(\theta)+\alpha_2\Theta(\theta)=0\\ \Psi''(\varphi)+\alpha_3\Psi(\varphi)=0\end{cases}$$

en posant les cas suivants

Cas(1) $\alpha_2=n^2$ *et* $\alpha_3=m^2\Rightarrow$

$$\left(Sinh(\eta)\right)^2\left(H''(\eta)-n^2H(\eta)\right)+\left(\frac{1}{4}-m^2\right)H(\eta)=0$$

Posons $\xi=Cotanh(\eta)\quad \frac{d\xi}{d\eta}=\frac{1}{\left(Sinh(\eta)\right)^2}=\frac{\left(Cosh(\eta)\right)^2-\left(Sinh(\eta)\right)^2}{\left(Sinh(\eta)\right)^2}=\xi^2-1$

$$\Leftrightarrow \frac{dH(\xi)}{d\eta}=\left(\xi^2-1\right)\frac{dH(\xi)}{d\xi}\quad \frac{d^2H(\xi)}{d\eta^2}=\left(\xi^2-1\right)^2\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2}+2\xi\left(\xi^2-1\right)\frac{dH(\xi)}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi^2-1}\left(\left(\xi^2-1\right)^2\frac{d^2H(\eta)}{d\xi^2}+2\xi\left(\xi^2-1\right)\frac{dH(\eta)}{d\xi}-n^2H(\eta)\right)+\left(\frac{1}{4}-m^2\right)H(\eta)=0$$

$$\left(\xi^2-1\right)\frac{d^2H(\eta)}{d\xi^2}+2\xi\frac{dH(\eta)}{d\xi}+\left(\frac{1}{4}-m^2-\frac{n^2}{\xi^2-1}\right)H(\eta)=0\Rightarrow H(\eta)=A\,P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)+B\,Q^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)$$

$$\Theta''(\theta)+n^2\Theta(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A\,Cos(n\theta)+B\,Sin(n\theta)$$

$$\Psi''(\varphi)+m^2\Psi(\varphi)=0\Rightarrow\Psi(\varphi)=A\,Cos(m\varphi)+B\,Sin(m\varphi)$$

Cas(2) $\alpha_2=0$ *et* $\alpha_3=m^2$

$$\left(\xi^2-1\right)\frac{d^2H(\eta)}{d\xi^2}+2\xi\frac{dH(\eta)}{d\xi}+\left(\frac{1}{4}-m^2\right)H(\eta)=0\Rightarrow H(\eta)=A\,P_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)+B\,Q_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)$$

$$\Theta''(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A+B\theta$$

$$\Psi''(\varphi)+n^2\Psi(\varphi)=0\Rightarrow\Psi(\varphi)=A\,Cos(m\varphi)+B\,Sin(m\varphi)$$

Cas(3) $\alpha_2=0$ *et* $\alpha_3=0$

$$\left(Sinh(\eta)\right)^2H''(\eta)+\frac{H(\eta)}{4}=0$$

$$\Rightarrow H(\eta)=A\,P_{-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)+B\,Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)\quad et\quad \Theta(\theta)=A+B\theta\quad et\quad \Psi(\varphi)=A+B\varphi$$

Cette forme de R-séparabilité est particulièrement adaptée aux problèmes ayant une dépendance à l'angle azimutal φ.

Tout comme dans le cas de R-séparabilité-1, un quatrième cas de valeurs des variables de séparation peut-être envisagés, notamment lorsque α_2 <0. En gardant un solide de révolution azimutale complet (soit une constante de séparation azimutale, en φ, égale à m entier), il donnerait des équations de la forme,

$$Cas(4) \quad \alpha_2 = n^2 \ et \ \alpha_3 = -\tau^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} (Sinh(\eta))^2 \left(H''(\eta) - n^2 H(\eta)\right) + \left(\frac{1}{4} + \tau^2\right) H(\eta) = 0 \\ \Theta''(\theta) + n^2 \Theta(\theta) = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A\,Cos(n\theta) + B\,Sin(n\theta) \\ \Psi''(\varphi) - \tau^2 \Psi(\varphi) = 0 \Rightarrow \Psi(\varphi) = A\,Cosh(\tau\varphi) + B\,Sinh(\tau\varphi) \end{array} \right.$$

$$Posons \quad \xi = Cotanh(\eta) \quad \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{(Sinh(\eta))^2} = \frac{(Cosh(\eta))^2 - (Sinh(\eta))^2}{(Sinh(\eta))^2} = \xi^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{dH(\xi)}{d\eta} = (\xi^2 - 1)\frac{dH(\xi)}{d\xi} \quad \frac{d^2H(\xi)}{d\eta^2} = (\xi^2-1)^2 \frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} + 2\xi(\xi^2-1)\frac{dH(\xi)}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi^2 - 1}\left((\xi^2-1)^2 \frac{d^2H(\eta)}{d\xi^2} + 2\xi(\xi^2-1)\frac{dH(\eta)}{d\xi} - n^2 H(\eta)\right) + \left(\frac{1}{4} + \tau^2\right) H(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow (\xi^2-1)\frac{d^2H(\eta)}{d\xi^2} + 2\xi\frac{dH(\eta)}{d\xi} + \left(\frac{1}{4} + \tau^2 - \frac{n^2}{\xi^2 - 1}\right) H(\eta) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\xi^2)\frac{d^2H(\eta)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH(\eta)}{d\xi} - \left(\frac{1}{4} + \tau^2 + \frac{n^2}{1 - \xi^2}\right) H(\eta) = 0 \Rightarrow H(\xi) = A\,P^{\pm n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi) + B\,Q^{\pm n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\xi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(\eta) = A\,P^{\pm n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cotanh(\eta)) + B\,Q^{\pm n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cotanh(\eta)) \\ \Theta(\theta) = A\,Cos(n\theta) + B\,Sin(n\theta) \\ \Psi(\varphi) = A\,Cosh(\tau\varphi) + B\,Sinh(\tau\varphi) \end{cases}$$

Contraintes et conditions imposées pour les solutions de l'équation de Laplace pour les problèmes aux limites dans le système de coordonnées toroïdales.

D'après les formules de changement les coordonnées toroïdales se comportent à l'inverse des coordonnées cartésiennes :

$$x = \frac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \quad y = \frac{a\,Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \quad z = \frac{a\,Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

$$avec$$

$$0 \le \eta < +\infty \quad -\pi < \theta \le \pi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$\eta \to \infty \Rightarrow x = a\,Cos(\varphi) \quad y = a\,Sin(\varphi) \quad z = 0 \Rightarrow cercle\ de\ rayon\, a$$

$$\eta = 0 \Rightarrow x = 0 \quad y = 0 \quad z = \frac{a\,Sin(\theta)}{1-Cos(\theta)} \Rightarrow axe\ z$$

Dès lors la description d'un problème intérieur en coordonnées toroïdales η correspond à un problème extérieur au domaine décrit en coordonnées cartésiennes, et inversement. Typiquement un problème d'équation de la chaleur à l'intérieur d'un anneau torique représente un problème "extérieur" en coordonnées toroïdales, et inversement un problème d'électrostatique extérieur à un anneau chargé représente un problème intérieur en coordonnées toroïdales.

La première contrainte qui s'impose à ces problèmes est d'abord que les solutions soient finies en tout point du domaine étudié, paramétré dans le système de coordonnées toroïdales. La deuxième contrainte est liée à la forme géométrique du domaine. Si par exemple le domaine est un anneau torique complet, il convient que les solutions soient 2π-périodique tant en ϑ que φ.

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ fini, ne\ comporte\ aucune\ singularité, continue\ et\ dérivable$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ périodique\ en\ \theta\ de\ période\ 2\pi\ soit\ T(\eta,\theta,\varphi) = T(\eta,\theta+\pi,\varphi)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\ périodique\ en\ \theta\ de\ période\ 2\pi\ soit\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta} = \frac{\partial T(\eta,\theta+\pi,\varphi)}{\partial\theta}$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ périodique\ en\ \varphi\ de\ période\ 2\pi\ soit\ T(\eta,\theta,\varphi) = T(\eta,\theta,\varphi+2\pi)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\ périodique\ en\ \varphi\ de\ période\ 2\pi\ soit\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi+2\pi)}{\partial\varphi}$$

La périodicité des solutions dans les angles ϑ et φ, liée à une géométrie d'anneau complet (et non de section d'anneau dans les deux angles) imposent nécessairement que les paramètres n et m des solutions soit des entiers naturels, tant dans la R-Séparabilité-1 que la la R-Séparabilité-2. De plus contrairement à la sphère, il n'y a pas de contraintes de bornes supérieures de m comme pour la cas d'une sphère où par exemple m <= n (cas R-Séparabilité-1) .

On peut ajouter d'autres contraintes liées à la répartition des conditions aux limites. On peut imaginer par exemple des conditions aux limites indépendantes de φ, qui soit paires en ϑ ou bien impaires en ϑ, ou bien des conditions aux limites dépendantes de φ, qui soit paires en φ ou bien impaires en φ. Ce qui signifie que les solutions exhibent également les mêmes propriétés :

$$\text{Conditions aux limites dependant pas de } \varphi$$
$$T(\eta,\theta,\varphi) \Rightarrow T(\eta,\theta)$$
$$\text{Conditions aux limites paires en } \theta \quad \text{Conditions aux limites impaires}$$
$$T(\eta,\theta) = T(\eta,-\theta) \qquad T(\eta,\theta) = -T(\eta,-\theta)$$
$$\text{Conditions aux limites générales paires en } \theta \quad \text{Conditions aux limites générales impaires en } \theta$$
$$T(\eta,\theta,\varphi) = T(\eta,-\theta,\varphi) \qquad T(\eta,\theta,\varphi) = -T(\eta,-\theta,\varphi)$$
$$\text{Conditions aux limites générales paires en } \varphi \quad \text{Conditions aux limites générales impaires en } \varphi$$
$$T(\eta,\theta,\varphi) = T(\eta,\theta,-\varphi) \qquad T(\eta,\theta,\varphi) = -T(\eta,\theta,-\varphi)$$

Pour la contrainte de finitude de la solution, il convient de choisir une base de fonctions propres qui n'induit pas le choix de fonctions divergentes sur le domaine étudiée. Seules les parties radiales (dépendance en η) induites dans la résolution R-Séparable de l'équation de Laplace présente un risque de divergence. Ce sont des fonctions de Legendre de première et deuxième espèce. Par exemple sur un problème bidimensionnelle torique (η,ϑ), dans la R-séparabilité normale, les solutions s'écrivent sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\left(A_{\eta n}P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big) + B_{\eta n}Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\right)\big(A_{\vartheta n}Cos(n\vartheta) + B_{\vartheta n}Sin(n\theta)\big)\right)$$

Et dans une configuration tri-dimensionnelle du problème aux limites (R-Séparabilité-1) :

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \times$$
$$\times\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\left(A^{\eta}_{n,m}P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big) + B^{\eta}_{n,m}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\right)\big(A^{\vartheta}_{n}Cos(n\vartheta) + B^{\vartheta}_{n}Sin(n\theta)\big)\big(A^{\varphi}_{m}Cos(m\varphi) + B^{\varphi}_{m}Sin(m\varphi)\big)\right)$$

et dans la R-Séparabilité-2, les solutions restent dépendantes des trois coordonnées :

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}} \times$$
$$\times\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\left(A^{\eta}_{n,m}P^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big) + B^{\eta}_{n,m}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)\right)\big(A^{\vartheta}_{n}Cos(n\vartheta) + B^{\vartheta}_{n}Sin(n\theta)\big)\big(A^{\varphi}_{m}Cos(m\varphi) + B^{\varphi}_{m}Sin(m\varphi)\big)\right)$$

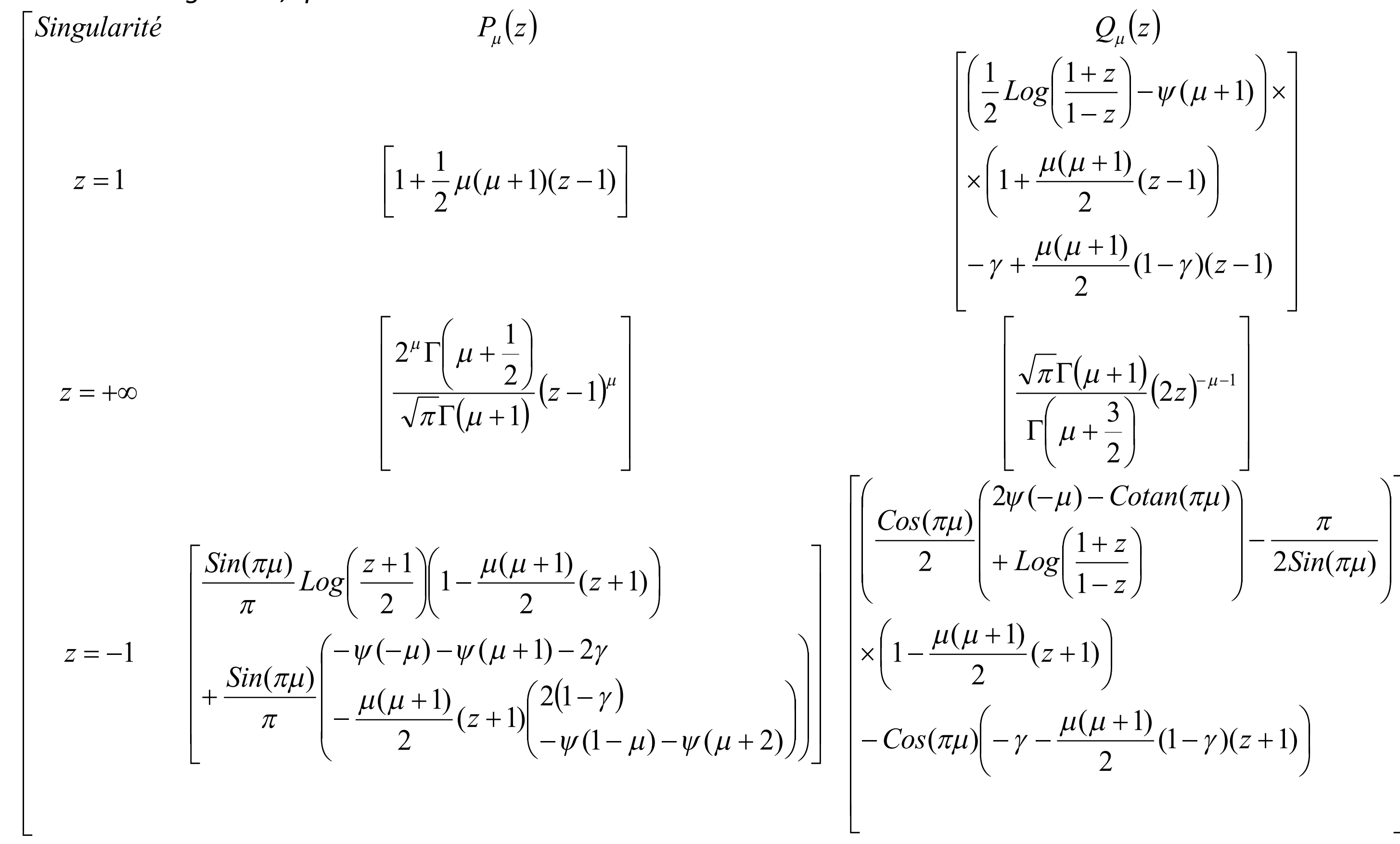
<u>En réalité la R-Séparabilité-2 n'introduit pas de nouvelles fonctions propres à partir desquelles développer une solution, car il se trouve que les "harmoniques toroïdales" sont liées par les formules de Whipple :</u>

$$P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big) = \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\, Sinh(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}} Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)$$

$$Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big) = \frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\, Sinh(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}} P^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)$$

Ce qui prouve que les deux développements en série sont identiques !

La divergence des solutions dépend donc du comportement des fonctions de Legendre aux points connus de singularité, qui sont ici z=+1 ou -1 ou z=+∞ :



$$\begin{bmatrix}
Singularit\acute{e} & P_\mu(z) & Q_\mu(z) \\
z=1 & \left[1+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)(z-1)\right] & \left[\begin{matrix}\left(\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\psi(\mu+1)\right)\times \\ \times\left(1+\frac{\mu(\mu+1)}{2}(z-1)\right) \\ -\gamma+\frac{\mu(\mu+1)}{2}(1-\gamma)(z-1)\end{matrix}\right] \\
z=+\infty & \left[\frac{2^\mu\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)}(z-1)^\mu\right] & \left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)}(2z)^{-\mu-1}\right] \\
z=-1 & \left[\begin{matrix}\frac{Sin(\pi\mu)}{\pi}Log\left(\frac{z+1}{2}\right)\left(1-\frac{\mu(\mu+1)}{2}(z+1)\right) \\ +\frac{Sin(\pi\mu)}{\pi}\left(\begin{matrix}-\psi(-\mu)-\psi(\mu+1)-2\gamma \\ -\frac{\mu(\mu+1)}{2}(z+1)\left(\begin{matrix}2(1-\gamma) \\ -\psi(1-\mu)-\psi(\mu+2)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\left(\frac{Cos(\pi\mu)}{2}\left(\begin{matrix}2\psi(-\mu)-Cotan(\pi\mu) \\ +Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\end{matrix}\right)-\frac{\pi}{2Sin(\pi\mu)}\right) \\ \times\left(1-\frac{\mu(\mu+1)}{2}(z+1)\right) \\ -Cos(\pi\mu)\left(-\gamma-\frac{\mu(\mu+1)}{2}(1-\gamma)(z+1)\right)\end{matrix}\right]
\end{bmatrix}$$

Soit en simplifiant avec les valeurs limites :

Singularité	$P_\mu(z)$	$Q_\mu(z)$
$z=1$	*fini*	$+\infty$
$z=+\infty$	$+\infty$	*fini*
$z=-1$	*fini*	$\pm\infty$ *μ entier sinon fini*

Pour les deux formes de séparabilité, le paramètre z change de comportement, pour $z = Cosh(\eta)$*, la fonction est croissante en η, par contre pour* $z = Cotanh(\eta) = \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}$*, la fonction est décroissante en η. Le choix des solutions finies peut se résumer par le tableau suivant :*

	Problème intérieur en coordonnées cartésiennes	*Problème extérieur en coordonnées cartésiennes*
Domaine cartésien	*Intérieur d'un anneau torique*	*Extérieur d'un anneau torique*
Coordonnées toroïdales	*Problème extérieur en coordonnées toroïdales*	*Problème intérieur en coordonnées toroïdales*
Domaine de la variable η	$[\eta_0,+\infty)$	$[0,\eta_0]$
Domaine de la variable Cosh(η), R-séparabilité 1	$[Cosh(\eta_0),+\infty)$	$[1,Cosh(\eta_0)]$
Domaine de la variable Cotanh(η), R-séparabilité 2	$(1,Cotanh(\eta_0)]$	$[Cotanh(\eta_0),+\infty)$
Fonctions radiales finies R-séparabilité 1	$Q_{n-1/2}(Cosh(\eta))$	$P_{n-1/2}(Cosh(\eta))$
Fonctions radiales finies R-séparabilité 2	$P_{n-1/2}(Cotanh(\eta))$	$Q_{n-1/2}(Cotanh(\eta))$

Problème intérieur de Dirichlet à deux et trois dimensions: soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'un tore dont les conditions aux limites de Dirichlet dépendent des angles θ et φ, puis du seul angle θ :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi)=0 \quad (\eta,\theta,\varphi)\in\Omega=\left\{\eta\geq l_\eta,\theta\in[-\pi,\pi],\varphi\in[0,2\pi]\right\} \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{r=\infty}\ fini$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi) \quad ou\,bien \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta) \quad ou\,bien \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\varphi)$$

Le problème en coordonnées toroïdales se présente donc comme un problème extérieur, du fait du paramétrage du système de coordonnées. *On rappelle les contraintes de ce problème exposées précédemment :*

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ fini, ne\ comporte\ aucune\ singularité, continue\ et\ dérivable$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ périodique\ en\ \theta\ de\ période\ 2\pi\ soit\ T(\eta,\theta,\varphi)=T(\eta,\theta+\pi,\varphi)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\ périodique\ en\ \theta\ de\ période\ 2\pi\ soit\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta}=\frac{\partial T(\eta,\theta+\pi,\varphi)}{\partial\theta}$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ périodique\ en\ \varphi\ de\ période\ 2\pi\ soit\ T(\eta,\theta,\varphi)=T(\eta,\theta,\varphi+2\pi)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\ périodique\ en\ \varphi\ de\ période\ 2\pi\ soit\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi+2\pi)}{\partial\varphi}$$

R-séparabilité 1 : problème intérieur dépendant des variables η et θ

Cela conduit au choix d'une partie radiale décroissante en η et s'annulant à l'infini, et des parties angulaires possédant des valeurs propres n et m entières, soit une solution qui se développe sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

$$\left(B_0\,Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=1,+\infty}Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\left(A_{n,m}Cos(n\vartheta)+B_{n,m}Sin(n\theta)\right)\left(C_{n,m}Cos(m\varphi)+D_{n,m}Sin(m\varphi)\right)\right)$$

Lorsque les conditions aux limites ne dépendent pas de φ. La solution s'écrit :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(B_0\,Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\left(A_nCos(n\vartheta)+B_nSin(n\theta)\right)\right)$$

Limitons nous au cas sans dépendance à φ. Lorsque les conditions aux limites angulaires sont paires, alors la solution se développe en série :

$$f(\theta,\varphi)=f(\theta) \quad et \quad f(-\theta)=f(\theta)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(B_0\,Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}A_nCos(n\vartheta)\,Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

Dans le cas de conditions aux limites impaires, la série prend la forme :

$$f(\theta,\varphi)=f(\theta) \quad et \quad f(-\theta)=-f(\theta)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=1,+\infty}A_nSin(n\vartheta)\,Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

Compte tenu des conditions aux limites, nous avons alors la solution générale pour des conditions aux limites de Dirichlet paires, $f_\theta(\theta)=f_\theta(-\theta)$, sous la forme :

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = f_\theta(\theta) = \sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}\left(A_0 Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right) + \sum_{n=1,+\infty} A_n Cos(n\vartheta) Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)$$

$$\Theta_0(\theta)=1 \Rightarrow \left\|\Theta_0\right\|^2 = 2\pi \quad \Theta_n(\theta)=Cos(n\theta) \Rightarrow \left\|\Theta_n\right\|^2 = \pi$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{\left\|\Theta_0\right\|^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}} \quad A_n = \frac{1}{\left\|\Theta_n\right\|^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \frac{f_\theta(\theta)\, Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$B_0 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}} = 2\int_0^{\pi} d\theta \frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \frac{f_\theta(\theta)\, Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}} = 2\int_0^{\pi} d\vartheta \frac{f_\theta(\theta)\, Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(B_0 \frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{2 Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} + \sum_{n=1,+\infty} B_n \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} Cos(n\vartheta)\right)$$

Pour développer plus avant des cas particuliers de conditions aux limites on utilise le résultat des représentations intégrales des fonctions de Legendre de degré demi-entier. Sachant que selon Lebedev "Special Functions and their applications", 1965, section 7.10 formule 7.10.10, ainsi que Louis Robin « Fonctions-Sphériques-de-Legendre-et-Fonctions-Sphéroidales, Tome III », 1969, page 113, également cité dans un l'article de S.C.Loh, 1959 « The Calculation of Electric Potential and the Capacity of a Tore by means of Toroidal functions » formule (6) page 699:

$$Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} d\theta \frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) = Q_{-n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$pour\ n = 0,1,2,3,...$$

Il vient pour une condition aux limites paire simplifiée:

$$f_\theta(\theta)=1 \quad B_0 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}} = 2\sqrt{2} Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}} = 2\sqrt{2} Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta) = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + \sum_{n=1,+\infty} Cos(n\vartheta) Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right) \equiv 1$$

<u>Normalement cette expansion en série doit converger uniformément vers 1 car dans ce cas la solution est triviale</u>. *Pour le montrer utilisons le résultat établi ci-après sur le problème extérieur de Dirichlet <u>(problème du potentiel électrostatique extérieur d'un corps au potentiel donné). La solution s'écrit (voir plus loin)</u> :*

$$T(\eta,\theta)=V_0 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\\ +\sum_{n=1,+\infty}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\end{array}\right)$$

La solution résulte du développement en série sur un système complet (mais non orthogonal) de fonction toroïdales, sur un problème aux limites qui prend la valeur V_0 en $\eta=l_\eta$, en portant justement l'expression à la position en coordonnées toroïdales $\eta=l_\eta$ il vient avec une valeur de potentiel $V_0=1$:

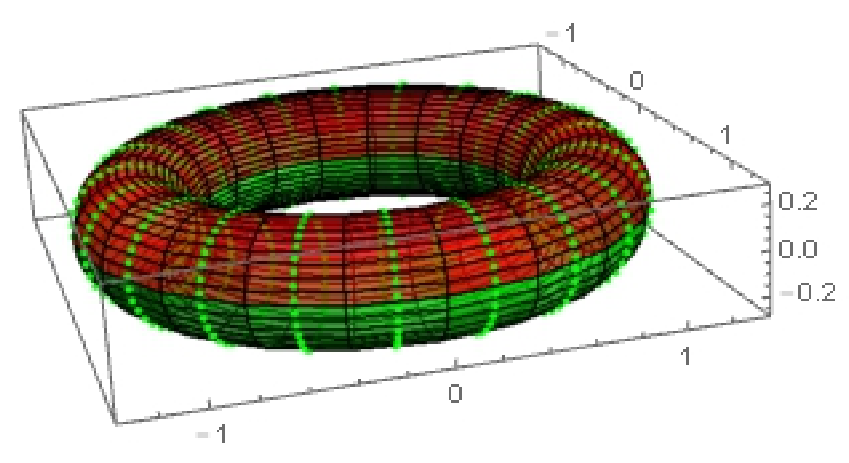
$$1=2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)Cos(n\vartheta)\right)$$

La valeur l_η pouvant être quelconque on en déduit immédiatement pour toute valeur de η :

$$1=2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)\right)$$

On peut d'une certaine façon qualifier cette égalité de « partition de l'unité » pour les fonctions toroïdales.

Problème intérieur de Dirichlet sur un tore avec une condition aux limites impaire en ϑ :



Selon des calculs similaires à ceux de l'exemple précédent, la solution générale pour des conditions aux limites de Dirichlet impaires, $f_\theta(\theta)=-f_\theta(-\theta)$, sous la forme :

$$\Theta_n(\theta)=Sin(n\theta)\Rightarrow\left\|\Theta_n\right\|^2=\pi \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta)=\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=1,+\infty}A_n Sin(n\vartheta)Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)$$

$$B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\;Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\int_{0}^{\pi}d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\;Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

Prenons maintenant une condition aux limites simplifiée dans laquelle la surface est portée à la valeur Sin(ϑ), Il vient :

$$B_n=2\int_{0}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Sin(\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}} \qquad Sin(n\vartheta)Sin(\vartheta)=\frac{Cos((n-1)\vartheta)-Cos((n+1)\vartheta)}{2}$$

$$\Rightarrow B_n=\int_{0}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Cos((n-1)\vartheta)-Cos((n+1)\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=\sqrt{2}\left(Q_{n-\frac{3}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=1,+\infty}\left(Q_{n-\frac{3}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)\right)$$

Prenons également une condition aux limites simplifiée dans laquelle la surface est portée à la valeur Sin(mϑ), Il vient :

$$B_n = 2\int_0^{\pi} d\vartheta \, \frac{Sin(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} \qquad Sin(n\vartheta)Sin(m\vartheta) = \frac{Cos((n-m)\vartheta) - Cos((n+m)\vartheta)}{2}$$

$$\Rightarrow B_n = \int_0^{\pi} d\vartheta \, \frac{Cos((n-m)\vartheta) - Cos((n+m)\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = \begin{cases} \sqrt{2}\left(Q_{m-n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) - Q_{n+m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right) & si \quad m > n \\ \sqrt{2}\left(Q_{n-m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) - Q_{n+m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right) & si \quad m \le n \end{cases}$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=1,+\infty}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) - Q_{n+m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right)\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)\right)$$

Prenons maintenant une condition aux limites simplifiée dans laquelle la surface supérieure est portée à la valeur +1 et la surface inférieure à la valeur -1. Il vient :

$$\left.\begin{array}{ll} f_\theta(\theta) = 1 & \theta \in [0,\pi] \\ f_\theta(\theta) = -1 & \theta \in [-\pi,0] \end{array}\right\} \Rightarrow f_\theta(\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0,+\infty}\frac{Sin((2m+1)\vartheta)}{(2m+1)}$$

$$B_n = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0,+\infty}\frac{1}{(2m+1)}\int_0^{\pi} d\vartheta \, \frac{Sin((2m+1)\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0,+\infty}\frac{1}{(2m+1)}\int_0^{\pi} d\vartheta \, \frac{Cos(|n-2m-1|\vartheta) - Cos((n+2m+1)\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{m=0,+\infty}\frac{1}{(2m+1)}\left(Q_{|n-2m-1|-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) - Q_{n+2m+\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{\left(Q_{|n-2m-1|-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) - Q_{n+2m+\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right)}{(2m+1)}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)\right)$$

De même pour le problème électrostatique extérieur la solution s'écrit :

$$T(\eta,\theta) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{\left(Q_{|n-2m-1|-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) - Q_{n+2m+\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right)}{(2m+1)}\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)\right)$$

Solution général au problème de Dirichlet sur un-tore complet pour des conditions aux limites en ϑ admettant un développement en série de Fourier

Compte tenu des résultats obtenus précédemment, en supposant que les conditions aux limites admettent un développement en série de Fourier :

$$T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=0,+\infty}\left(A_nCos(n\vartheta)+B_nSin(n\vartheta)\right)\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\right)\quad A_0=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$A_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{f_\theta(\theta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\quad B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\quad Si\ f_\theta(\theta)=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}Cos(m\vartheta)+a_m^{fs}Sin(m\vartheta)$$

$$a_0^{fc}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)\quad a_n^{fc}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Cos(n\vartheta)\quad a_n^{fs}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)$$

$$A_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}Cos(m\vartheta)+a_m^{fs}Sin(m\vartheta)\right)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{\left(a_m^{fc}Cos(m\vartheta)+a_m^{fs}Sin(m\vartheta)\right)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(m\vartheta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}+\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fs}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(m\vartheta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$Or\quad\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(m\vartheta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=0\quad et\quad\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(m\vartheta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(m\vartheta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow A_n=2\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(m\vartheta)Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Cos\left(|n-m|\vartheta\right)+Cos\left((n+m)\vartheta\right)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow A_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fc}Q_{m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\quad A_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fc}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)+Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)$$

$$B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}Cos(m\vartheta)+a_m^{fs}Sin(m\vartheta)\right)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=\sum_{m=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{\left(a_m^{fc}Cos(m\vartheta)+a_m^{fs}Sin(m\vartheta)\right)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fc}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}+\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fs}\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$Or\quad\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=0\quad et\quad\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$\Rightarrow B_n=2\sum_{m=0}^{+\infty}a_m^{fs}\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(m\vartheta)Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fs}\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Cos\left(|n-m|\vartheta\right)-Cos\left((n+m)\vartheta\right)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

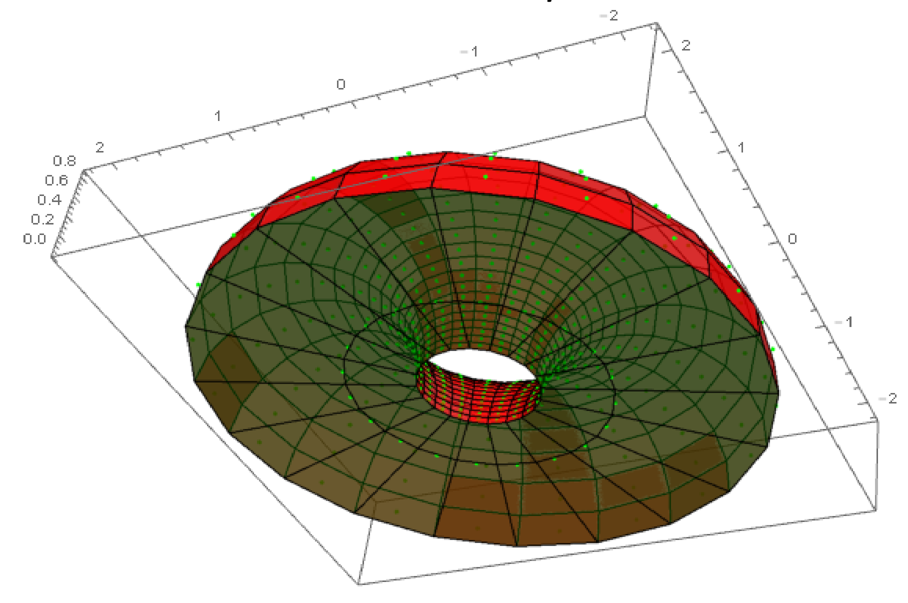
$$\Rightarrow B_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fs}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)$$

Il vient la solution suivante :

$$a_n^{fc} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\ f_\theta(\theta)Cos(n\vartheta) \quad a_n^{fs} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{l}\sum_{m=0,+\infty} a_m^{fc} Q_{m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}+ \\ +\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty} a_m^{fc}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)+Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)+ \\ +\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty} a_m^{fs}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)\end{array}\right)$$

Extension au problème d'un demi-tore dont la base est portée à la valeur 0



Soit le problème sur le demi-tore :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi)=0 \quad (\eta,\theta,\varphi)\in\Omega=\left\{\eta\in\left[l_\eta,+\infty\right],\theta\in\left[0,\pi\right],\varphi\in\left[0,2\pi\right]\right\} \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{r=\infty}\ fini$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \theta\in[0,\pi]\\ \varphi\in[0,2\pi]}} = f(\theta) \quad T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\substack{\theta=0\\ \eta\in[l_\eta,+\infty]\\ \varphi\in[0,2\pi]}} = 0$$

D'après la construction des solutions sur un tore entier avec des conditions aux limites impaires :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi)=0 \quad (\eta,\theta,\varphi)\in\Omega=\left\{\eta\in\left[l_\eta,+\infty\right],\theta\in\left[-\pi,\pi\right],\varphi\in\left[0,2\pi\right]\right\} \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{r=\infty}\ fini$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \theta\in[0,\pi]\\ \varphi\in[0,2\pi]}} = f(\theta) \quad f(-\theta)=-f(\theta)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=1,+\infty} B_n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)\right)\Rightarrow T(\eta,0)=0$$

En raison de l'unicité de la solution du problème de Dirichlet même dans un domaine non connexe comme le tore, on a trouvé une solution pour le problème de départ. Si le demi tore est porté à la température constante T_0 :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi)=0 \quad (\eta,\theta,\varphi)\in\Omega=\left\{\eta\in\left[l_\eta,+\infty\right],\theta\in\left[0,\pi\right],\varphi\in\left[0,2\pi\right]\right\} \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{r=\infty}\ fini$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\substack{\eta=l_\eta\\ \theta\in[0,\pi]\\ \varphi\in[0,2\pi]}}=T_0 \quad T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\substack{\eta\in[l_\eta,+\infty]\\ \theta=0\\ \varphi\in[0,2\pi]}}=0$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{4T_0\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=1,+\infty}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{m=0,+\infty}\frac{\left(Q_{|n-2m-1|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+2m+\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)}{(2m+1)}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\times\\ \times Sin(n\vartheta)\end{array}\right\}\right)$$

Pour une fonction limite quelconque en introduisant le développement en série de Fourier :

$$a_n^{fs}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)$$

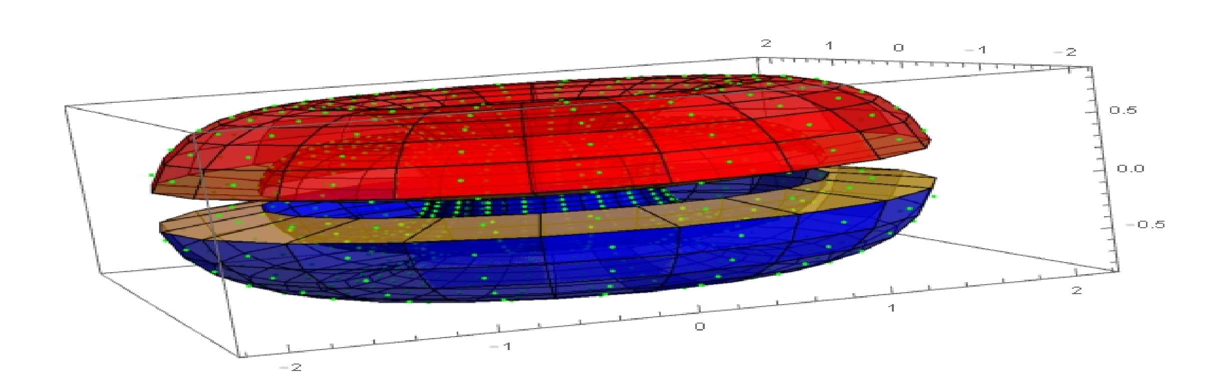
$$A_n=\int_{0}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_n\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)\right)$$

Problème intérieur de Dirichlet sur un tore complet et creux: soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'un tore creux dont les conditions aux limites de Dirichlet sont fixés en paroi intérieure et extérieure à des valeur différentes :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}],\theta\in[-\pi,\pi]\}$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \theta\in[-\pi,\pi]}}=T_1 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 2}\\ \theta\in[-\pi,\pi]}}=T_2$$



.

On ramène ce problème à un problème homogène de Dirichlet sur la face intérieure, à savoir :

$$T(\eta,\theta)=T_1+T_h(\eta,\theta)$$

$$\Delta T_h(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}]\}$$

$$T_h(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 2}}=T_2-T_1$$

Pour trouver la solution on peut facilement mettre à profit la formule de partition de l'unité appliqué aux valeurs aux limites du domaine :

$$T_1=T_1 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(l_{\eta 1})-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)Cos(n\vartheta)\right)$$

$$T_2-T_1=(T_2-T_1)2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(l_{\eta 2})-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)Cos(n\vartheta)\right)$$

La solution étant de la forme (conditions aux limites paires) :

$$T_h(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\begin{pmatrix} B_0\left(Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))-Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)+ \\ +\sum_{n=1,+\infty}A_nCos(n\vartheta)\left(Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))-Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)\end{pmatrix}$$

$$T_h(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta2}}=T_2-T_1$$

$$\Rightarrow\sqrt{Cosh(l_{\eta2})-Cos(\theta)}\begin{pmatrix} B_0\left(Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)+ \\ +\sum_{n=1,+\infty}A_nCos(n\vartheta)\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)\end{pmatrix}$$

$$=(T_2-T_1)2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(l_{\eta2})-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)Cos(n\vartheta)\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} B_0\left(Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)+ \\ +\sum_{n=1,+\infty}A_nCos(n\vartheta)\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)\end{pmatrix}=(T_2-T_1)\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)+ \\ +\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)Cos(n\vartheta)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} B_0=(T_2-T_1)\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)}{\left(Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)} \\ A_n=(T_2-T_1)\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)}{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)}\end{cases}$$

Il vient donc la solution du problème :

$$T(\eta,\theta)=T_1+$$

$$+(T_2-T_1)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)\dfrac{\left(Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))-Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)}{\left(Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)}+ \\ +\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)\dfrac{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))-Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)}{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta2})\right)-Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta1})\right)\right)}Cos(n\vartheta)\end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$T(\eta,\theta)=T_1 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)Cos(n\vartheta)\right)+$$

$$+\left(T_2-T_1\right)\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)\dfrac{\left(Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)-Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}{\left(Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)-Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}+\\ +\sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)\dfrac{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)-Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)-Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}Cos(n\vartheta)\end{array}\right)$$

$$T(\eta,\theta)=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(T_1Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\left(T_2-T_1\right)\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)\left(Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)-Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}{\left(Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)-Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}\right)+\\ +\sum_{n=1,+\infty}Cos(n\vartheta)\left(\begin{array}{l}T_1Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\\ +\left(T_2-T_1\right)Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)\dfrac{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)-Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}{\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 2})\big)-Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_{\eta 1})\big)\right)}\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

Il reste à prouver que cette formule donne une fonction qui ne dépend pas de l'angle θ ! ce qui n'est pas une mince affaire !

Problème intérieur homogène et inhomogène de Dirichlet sur un tore complet et creux: soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'un tore creux dont les conditions aux limites de Dirichlet sont inhomogènes en paroi extérieure et homogène en paroi intérieure

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}],\theta\in[-\pi,\pi]\}$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta1}\\ \theta\in[-\pi,\pi]}}=f_\theta(\theta) \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta2}\\ \theta\in[-\pi,\pi]}}=0$$

Compte tenu de la condition homogène de Dirichlet, la solution se développe comme suit :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)(A_nCos(n\vartheta)+B_nSin(n\theta))\right)$$

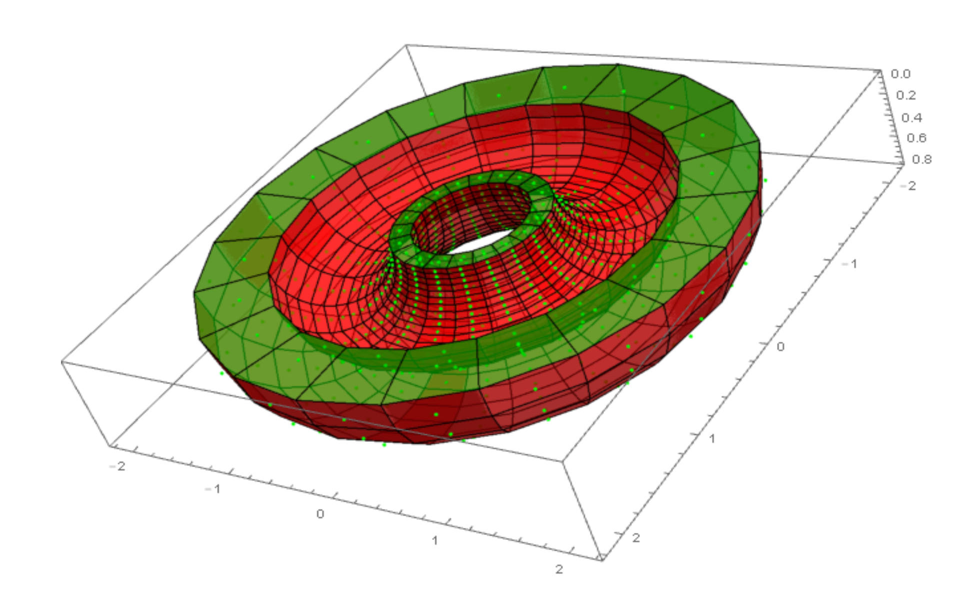
Et en introduisant le développement en série de Fourier de la fonction limite :

$$a_n^{fc}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Cos(n\vartheta) \quad a_n^{fs}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fc}Q_{m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\frac{\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)}{\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta1}))}{P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta1}))}{Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)}+\\ \displaystyle+\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fc}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))+Q_{n+m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right)\frac{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)}{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta1}))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta1}))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)}Cos(n\vartheta)+\\ \displaystyle+\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fs}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))-Q_{n+m-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\right)\frac{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)}{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta1}))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta1}))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta2}))}\right)}Sin(n\vartheta)\end{array}\right)$$

Problème intérieur homogène et inhomogène de Dirichlet sur un demi tore complet et creux: soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'un tore creux dont les conditions aux limites de Dirichlet sont inhomogènes en paroi extérieure, homogène en paroi intérieure et homogène nulle sur la tranche



D'après la construction précédente de la solution sur le tore entier creux, lorsque la condition aux limites inhomogène est impaire en angle θ, alors la solution est nulle sur la tranche. On peut donc utiliser cette solution pour ce problème sur le demi-tore. :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\left\{\eta\in\left[l_{\eta 1},l_{\eta 2}\right],\theta\in[0,\pi]\right\}$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \theta\in[0,\pi]}}=f_\theta(\theta) \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 2}\\ \theta\in[0,\pi]}}=0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}]\\ \theta=0}}=0$$

$$a_n^{fs}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times\left(\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fs}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{\left(\dfrac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}{\left(\dfrac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}Sin(n\vartheta)\right)$$

.

Problème intérieur homogène de Neumann et inhomogène de Dirichlet sur un tore complet et creux: soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'un tore creux dont les conditions aux limites de Dirichlet sont inhomogènes en paroi extérieure et extérieure à des valeur différentes :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\left\{\eta\in\left[l_{\eta 1},l_{\eta 2}\right],\theta\in\left[-\pi,\pi\right]\right\} \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \theta\in[-\pi,\pi]}}=f_\theta(\theta) \quad \frac{\partial T(\eta,\theta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\substack{\eta=l_{\eta 2}\\ \theta\in[-\pi,\pi]}}=0$$

Compte tenu de la condition homogène de Neumann, la solution se développe comme suit :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)\left(A_nCos(n\vartheta)+B_nSin(n\theta)\right)\right)$$

Et en introduisant le développement en série de Fourier de la fonction limite, on trouve la solution suivante :

$$a_n^{fc}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Cos(n\vartheta) \quad a_n^{fs}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\ f_\theta(\theta)Sin(n\vartheta)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{2}}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fc}Q_{m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\frac{\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}+\\ \displaystyle+\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fc}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)+Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}Cos(n\vartheta)+\\ \displaystyle+\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}a_m^{fs}\left(Q_{|n-m|-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)-Q_{n+m-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)\frac{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}{\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}-\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 1})\right)}{\frac{\partial}{\partial\eta}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_{\eta 2})\right)}\right)}Sin(n\vartheta)\end{array}\right)$$

<u>*Divers exemples tirés de la littérature*</u>

Homogénéisation de l'équation de poisson pour un système de coordonnées orthogonales de révolution

On exprime une solution particulière de l'équation de Poisson avec un terme source constant, dans le cas d'un système de coordonnées orthogonale de révolution (autour de l'axe z). Alors la coordonnées z ne dépend pas de l'angle azimutal φ, tout comme le rayon ρ :

$$\text{Intérieur} \quad \text{Poisson} \quad \Delta T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)=Q_0 \quad T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)=T_{\text{int}}(\alpha,\beta)$$

$$\text{Extérieur} \quad \text{Laplace} \quad \Delta T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)=0 \quad T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)=T_{ext}(\alpha,\beta)$$

$$T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)\Big|_{\alpha=\alpha_0}=T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)\Big|_{\alpha=\alpha_0} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}}T_{\text{int}}(\alpha,\beta,\varphi)\Big|_{\alpha=\alpha_0}=\frac{\partial}{\partial \vec{n}}T_{ext}(\alpha,\beta,\varphi)\Big|_{\alpha=\alpha_0}.$$

$$\Delta T(x,y,z)=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad \begin{cases} x(\alpha,\beta,\varphi) & z(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta,\varphi) & \rho(\alpha,\beta) \end{cases}$$

Dans ce cas, il existe toujours une solution particulière de l'équation de poisson que l'on eut utiliser pour homogénéiser cette équation en une équation de Laplace. La forme de la solution particulière est la suivante :

$$T_{part}(x,y,z)=A\rho^2=A(x^2+y^2)$$

$$\Delta T_{part}=Q_0 \Rightarrow 4A=Q_0 \Rightarrow A=\frac{Q_0}{4} \Rightarrow T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{4}(x^2+y^2).$$

Si l'on retranche de la solution intérieure cette solution particulière, alors le problème aux limites devient de Laplace et si à l'origine le problème ne dépend pas de l'angle azimutal, la résolution du problème devient classique. Toute solution de la forme :

$$T_{part}(x,y,z)=A\rho^2=\frac{Q_0}{4}(x^2+y^2)+B \Rightarrow \Delta T_{part}=Q_0$$

$$T_{part}(x,y,z)=\frac{Q_0}{6}(x^2+y^2+z^2)+B \Rightarrow \Delta T_{part}=Q_0.$$

où B est une constante quelconque est également solution particulière de l'équation de poisson.

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, tore dans un champ électrique uniforme le long de l'axe z, porté au potentiel 0, exemple tiré de l'ouvrage de N.N.Lebedev, I.P.Skalkaya, Y.S.Ufliand « Problems of Mathematical physics » (problème n° 494 page 236)

$$x = \frac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \quad y = \frac{a\,Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \quad z = \frac{a\,Sin(\theta)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}$$

$$avec \quad 0 \le \eta < +\infty \quad 0 < \theta \le 2\pi \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$Axe\,z \rightarrow \eta = 0 \quad z = \frac{a\,Sin(\theta)}{1 - Cos(\theta)} = \frac{a\,Sin(\theta)}{2Sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = a\,Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$Cercle\ limite \Rightarrow \eta \rightarrow +\infty \quad x = a\,Cos(\varphi) \quad y = a\,Sin(\varphi) \Rightarrow rayon\ a$$

Pour un tore d'iso-surface η= η0, s*i les dimensions du tore sont définies comme suit, r : rayon de la section de l'anneau, l : rayon du tore, rayon du cercle au centre de la section, Alors, il vient :*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a\,Sinh(l_\eta)}{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)} \quad z = \frac{a\,Sin(\theta)}{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}$$

$$z = 0 \Rightarrow Cos(\theta) = \pm 1 \quad \rho = \frac{a\,Sinh(l_\eta)}{Cosh(l_\eta) \pm 1} \quad \rho_{\min} = \frac{a\,Sinh(\eta)}{Cosh(l_\eta) + 1} \quad \rho_{\max} = \frac{a\,Sinh(l_\eta)}{Cosh(l_\eta) - 1}$$

$$\rho_{\max} - \rho_{\min} = \frac{a\,Sinh(l_\eta)}{Cosh(l_\eta) - 1} - \frac{a\,Sinh(l_\eta)}{Cosh(l_\eta) + 1} = \frac{2a\,Sinh(l_\eta)}{Cosh^2(l_\eta) - 1} = \frac{2a}{Sinh(l_\eta)} = 2r$$

$$l = \frac{\rho_{\max} + \rho_{\min}}{2} = \frac{a\,Sinh(l_\eta)Cosh(l_\eta)}{Cosh^2(l_\eta) - 1} = a\frac{Cosh(l_\eta)}{Sinh(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{Sinh(l_\eta)} \Rightarrow l^2 - r^2 = a^2\frac{Cosh^2(l_\eta) - 1}{Sinh^2(l_\eta)} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{l^2 - r^2} \Rightarrow Sinh(l_\eta) = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r} \quad Cosh(l_\eta) = \frac{l}{r}$$

D'autre part la solution doit se comporter à grande distance comme le potentiel d'un champ électrique uniforme, soit :

$$\lim_{z \to \pm\infty} T(\eta,\theta) = E_0 z = E_0 a \frac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}$$

La solution doit donc présenter le même niveau de symétrie que le terme Sin(θ) . on développe donc la solution avec les termes d'une condition aux limites de type impaire. La solution du problème extérieur ajoute au développement en série pour une condition aux limites impaires, la forme asymptotique du potentiel à grande distance (par évidence solution de l'équation de Laplace par retour en coordonnées cartésiennes):

$$T(\eta,\theta) = E_0 a \frac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} + \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi} \sum_{n=1,+\infty} B_n \frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} Sin(n\vartheta)$$

Avec :

$$B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \frac{f_\theta(\theta)\,Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = 2\int_0^{\pi} d\vartheta \frac{f_\theta(\theta)\,Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}}$$

La condition aux limites à la surface du tore au potentiel nul devient alors :

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta = l_\eta} = E_0 a \frac{Sin(\theta)}{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)} + \frac{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}}{\pi} \sum_{n=1,+\infty} B_n\,Sin(n\vartheta) = 0$$

$$f_\theta(\theta) = -E_0 a \frac{Sin(\theta)}{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)} \Rightarrow \quad B_n = 2\int_0^{\pi} d\vartheta \frac{f_\theta(\theta)\,Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = -2E_0 a \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{Sin(\theta)Sin(n\vartheta)}{\left(Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

En utilisant la formule d'intégration définie :

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}d\theta\ \frac{Cos(n\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta\ \frac{Cos(n\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\ \frac{Cos(n\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}\qquad pour\ n=0,1,2,3,...$$

et en intégrant par partie, il vient :

$$\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(\theta)Sin(n\vartheta)}{(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}=-2\int_0^{\pi}d\vartheta\left(\frac{1}{(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}\right)'Sin(n\vartheta)$$

$$=-2\left\{\left[\frac{Sin(n\vartheta)}{(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{nCos(n\vartheta)}{(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$=2n\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Cos(n\vartheta)}{(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta))^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2}nQ_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{Sin(\theta)Sin(n\vartheta)}{(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}=2\sqrt{2}nQ_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))$$

Ce qui donne comme solution, finalement :

$$T(\eta,\theta)=E_0a\left(\frac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}-\frac{4}{\pi}\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty}n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Sin(n\vartheta)\right)$$

Le profil sur l'axe z est le suivant (η=0) :

$$T(0,\theta)=E_0a\frac{Sin(\theta)}{1-Cos(\theta)}-\frac{4E_0a}{\pi}\sqrt{2}\sqrt{1-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty}n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)$$

$$T(0,\theta)=E_0a\ Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{8E_0a}{\pi}Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{n=1,+\infty}n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)$$

Avec les données l,r, dimensionnelles du tore, la solution s'écrit :

$$T(0,\theta)=E_0\sqrt{l^2-r^2}\ Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{8E_0\sqrt{l^2-r^2}}{\pi}Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{n=1,+\infty}n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)$$

$$\Rightarrow T(0,\theta)=E_0\sqrt{l^2-r^2}\left\{Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{8}{\pi}Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{n=1,+\infty}n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Sin(n\vartheta)\right\}$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, tore dans un champ électrique uniforme le long de l'axe z, porté au potentiel V0

A la solution précédente, il suffit d'ajouter par principe de superposition, la solution du tore au potentiel fixe V0 sur la surface :

$$T(\eta,\theta)=\left\{\begin{array}{l} E_0 a\left(\dfrac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}-\dfrac{4}{\pi}\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty} n\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Sin(n\vartheta)\right)+ \\ +V_0\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\begin{array}{l}\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+ \\ +2\sum_{n=1,+\infty}\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, tore dans un champ électrique uniforme le long de l'axe x ou y, porté au potentiel 0

$$x=\frac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\quad y=\frac{a\,Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\quad z=\frac{a\,Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$
$$avec\quad 0\le\eta<+\infty\quad 0<\theta\le 2\pi\quad 0\le\varphi<2\pi$$

D'autre part la solution doit se comporter à grande distance comme le potentiel d'un champ électrique uniforme, soit :

$$\underset{x\to\pm\infty}{Lim}\,T(\eta,\theta)=E_0x=E_0\frac{a\,Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

La solution doit donc présenter le même niveau de symétrie que le terme constant θ soit Cos(θ). De plus on ne retient de la dépendance azimutale que le terme en Cos(ϕ) . On développe donc la solution avec les termes d'une condition aux limites de type paire. La solution du problème extérieur ajoute au développement en série pour une condition aux limites paire, la forme asymptotique du potentiel à grande distance (par évidence solution de l'équation de Laplace par retour en coordonnées cartésiennes):

$$T(\eta,\theta,\varphi)=E_0a\frac{Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}+\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{2\pi}\sum_{n=0,+\infty}\delta_nB_n\frac{P^1_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{P^1_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(\varphi)$$

$$\delta_0=1\quad\delta_n=2\quad n>0$$

Avec : $B_n=2\int_0^\pi d\vartheta\,\dfrac{f_\theta(\theta)\,Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$.

La condition aux limites à la surface du tore au potentiel nul devient alors :

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=E_0a\frac{Sinh(l_\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}+\frac{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}{2\pi}\sum_{n=0,+\infty}B_n\delta_nCos(n\vartheta)Cos(\varphi)=0$$

$$f_\theta(\theta)=-E_0a\frac{Sinh(l_\eta)}{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}\Rightarrow\quad B_n=2\int_0^\pi d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\,Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=-2E_0aSinh(l_\eta)\int_0^\pi d\vartheta\frac{Cos(n\vartheta)}{\left(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

.

En utilisant la formule d'intégration définie :

$$\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\sqrt{2}\,\frac{Q^1_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Sinh(\eta)}$$

.

Ce qui donne comme solution:

$B_n = 4\sqrt{2}E_0 a Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \qquad \delta_0 = 1 \quad \delta_n = 2 \quad n > 0$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} E_0 a \dfrac{Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} + \\ + 2E_0 a \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0,+\infty} \delta_n \frac{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P^1_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} P^1_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) Cos(n\vartheta) Cos(\varphi) \end{array} \right\}$$

.

Si le champ est dirigé selon l'axe y, il vient :

$\delta_0 = 1 \quad \delta_n = 2 \quad n > 0$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} E_0 a \dfrac{Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} + \\ + 2E_0 a \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0,+\infty} \delta_n \frac{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P^1_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} P^1_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) Cos(n\vartheta) Sin(\varphi) \end{array} \right\}$$

.

Et si le tore est porté au potentiel V0<>0, il vient :

Champ éléctrique axe x

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\left\{\begin{array}{l} E_0 a\dfrac{Sinh(\eta)Cos(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}+ \\ +2E_0 a\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\sum_{n=0,+\infty}\delta_n\dfrac{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}P^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\,Cos(n\vartheta)Cos(\varphi)+ \\ +V_0\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\begin{array}{l}\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+ \\ +2\sum_{n=1,+\infty}\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Cos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

Champ éléctrique axe y

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\left\{\begin{array}{l} E_0 a\dfrac{Sinh(\eta)Sin(\varphi)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}+ \\ +2E_0 a\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\sum_{n=0,+\infty}\delta_n\dfrac{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}P^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\,Cos(n\vartheta)Sin(\varphi)+ \\ +V_0\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\begin{array}{l}\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}P_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+ \\ +2\sum_{n=1,+\infty}\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Cos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

.

Exemple d'électrostatique : problème extérieur de Dirichlet, potentiel extérieur à la surface d'un tore conducteur parfait induit par une charge placée à l'origine des coordonnées et donc porté au potentiel 0. Exemple tiré de l'ouvrage de N.N.Lebedev, I.P.Skalkaya, Y.S.Ufliand « Problems of Mathematical physics » (problème n° 495 page 237)

La solution additionne le potentiel crée par la charge à la solution général du problème aux limites avec une fonction limite paire en θ. Il ne reste plus qu'à identifier les termes du développement par la condition aux limites à la surface :

$$T_q(\eta,\theta)=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q\big(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\big)}{a\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)}}=\frac{q\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{a\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}$$

$$B_0=\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\qquad B_n=\int_0^{2\pi}d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\,Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$T_s(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{B_0}{2P_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)}P_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)}Cos(n\vartheta)P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\right)$$

$$Si\quad T(\eta,\theta)=T_q(\eta,\theta)+T_s(\eta,\theta)\Rightarrow T_s(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=-T_q(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta}=-\frac{q}{a}\frac{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(l_\eta)+Cos(\theta)}}=f_\theta(\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}=2\sqrt{2}Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\Rightarrow\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}=2\sqrt{2}(-1)^nQ_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)$$

$$\Rightarrow B_0=-\frac{q}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{1}{\sqrt{Cosh(l_\eta)+Cos(\theta)}}=-\frac{q}{a}2\sqrt{2}Q_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)$$

$$\Rightarrow B_n=-\frac{q}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)+Cos(\theta)}}=-\frac{q}{a}2\sqrt{2}(-1)^nQ_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)$$

Ce qui donne la solution :

$$T(\eta,\theta)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{q\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{a\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}-\\ -\dfrac{q}{a}2\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\begin{array}{l}\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{2P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\\ +\displaystyle\sum_{n=1,+\infty}(-1)^n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{q\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{a\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}-\\ -\dfrac{q}{a}\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\begin{array}{l}\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\\ +2\displaystyle\sum_{n=1,+\infty}(-1)^n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\end{array}\right)\end{array}\right\}.$$

Le profil sur l'axe z est le suivant (η=0) :

$$T(0,\theta)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{q\sqrt{1-Cos(\theta)}}{a\sqrt{1+Cos(\theta)}}-\\ -\dfrac{q}{a}\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{1-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\dfrac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}+2\displaystyle\sum_{n=1,+\infty}(-1)^n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(0,\theta)=\frac{q}{a}\left\{Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\frac{Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\pi}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}+2\sum_{n=1,+\infty}(-1)^n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)\right)\right\}$$

$$\Rightarrow T(0,\theta)=\frac{q}{\sqrt{l^2-r^2}}\left\{Tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\frac{Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\pi}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}+2\sum_{n=1,+\infty}(-1)^n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)\right)\right\}.$$

Exemple régime stationnaire équation de la chaleur en présence de source de chaleur uniforme: problème intérieur de Dirichlet, à l'intérieur d'un tore dont la surface est à une valeur nulle avec une répartition uniforme de source de chaleur. Exemple tiré de l'ouvrage de N.N.Lebedev, I.P.Skalkaya, Y.S.Ufliand « Problems of Mathematical physics » (problème n° 498 page 238)

Il s'agit d'une équation de poisson. On utilise la solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson.

$$\Delta T_{part} = -Q_0 \Rightarrow T_{part}(x,y,z) = -\frac{Q_0}{4}\left(x^2+y^2\right) = -\frac{Q_0 a^2}{4}\frac{Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}.$$

On retranche cette solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson et la transformer en équation de Laplace :

$$T_{hom}(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{B_0}{2Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + \sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

$$T(\eta,\theta) = T_{part}(x,y,z) + T_{hom}(\eta,\theta)$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta} = 0 \Rightarrow T_{hom}(x,y,z)\Big|_{\eta=l_\eta} = -T_{part}(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta} = \frac{Q_0 a^2}{4}\frac{Sinh^2(l_\eta)}{\left(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \frac{Q_0 a^2}{4}\frac{Sinh^2(l_\eta)}{\left(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)\right)^2} \Rightarrow B_n = \int_0^{2\pi} d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\,Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$B_n = \frac{Q_0 a^2 Sinh^2(l_\eta)}{4}\int_0^{2\pi} d\vartheta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\left(Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}$$

De plus $Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) = \frac{e^{i m\pi}}{\sqrt{2\pi}}Sinh^m(\eta)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{m+\frac{1}{2}}}$ *m entier*

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2}}Sinh^m(\eta)\frac{(2m-1)!}{2^{2m}(m-1)!}\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow m=2 \qquad Q^2_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right) = \frac{3Sinh^2(l_\eta)}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{8\sqrt{2}}{3Sinh^2(l_\eta)}Q^2_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right) \Rightarrow B_n = \frac{Q_0 a^2 2\sqrt{2}}{3}Q^2_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta) = -Q_0 a^2\left\{\begin{array}{l}\frac{Sinh^2(\eta)}{4\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2} - \\ -\frac{\sqrt{2}}{3\pi}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\begin{array}{l}\frac{Q^2_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + \\ +2\sum_{n=1,+\infty}\frac{Q^2_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)\end{array}\right)\end{array}\right\}$$

.

Exemple gravitationnel: problème extérieur de Dirichlet, champ gravitationnel d'un tore de densité massique constante ρ. Exemple tiré de l'ouvrage de N.N.Lebedev, I.P.Skalkaya, Y.S.Ufliand « Problems of Mathematical physics » (problème n° 499 page 238)

Il s'agit d'une équation de poisson. On utilise la solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson.

$$\Delta T_{part} = -4\pi\rho \Rightarrow T_{part}(x,y,z) = -\pi\rho\left(x^2+y^2\right) = -\pi\rho a^2 \frac{Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2}.$$

On retranche cette solution particulière pour homogénéiser l'équation de Poisson et la transformer en équation de Laplace :

$$T_{\text{int}}^{hom}(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{A_0}{2Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + \sum_{n=1,+\infty}\frac{A_n}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)\right)$$

$$T_{\text{int}}(\eta,\theta) = T_{part}(x,y,z) + T_{\text{int}}^{hom}(\eta,\theta) = -\pi\rho a^2\frac{Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2} + T_{\text{int}}^{hom}(\eta,\theta)$$

$$T_{ext}(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{B_0}{2P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) + \sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)\right)$$

$$T_{\text{int}}(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta} = T_{ext}(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_\eta} \quad et \quad \left.\frac{\partial T_{\text{int}}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta} = \left.\frac{\partial T_{ext}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}$$

$$Puisque \quad \left.\frac{\partial T_{\text{int}}(\eta,\theta)}{\partial n}\right|_{\eta=l_\eta} = \left.\frac{\partial T_{ext}(\eta,\theta)}{\partial n}\right|_{\eta=l_\eta} \Leftrightarrow \frac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{a}\left.\frac{\partial T_{\text{int}}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta} = \frac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{a}\left.\frac{\partial T_{ext}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}$$

$$Or\ -\pi\rho a^2\frac{Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^2} = -\pi\rho a^2\frac{8\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}^2\left(Cosh(\eta)\right)}{2} + \sum_{n=1,+\infty}Q_{n-\frac{1}{2}}^2\left(Cosh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)\right)$$

.

Par application des conditions de continuité on aboutit au système d'équation linéaire par identification des termes en Cos(nθ) :

$$\text{Posons } \Delta(\eta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}$$

$$\Omega_n(Cosh(\eta))=-\pi\rho a^2\frac{8\sqrt{2}}{3}Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\Rightarrow\Omega_n'(Cosh(\eta))=-\pi\rho a^2\frac{8\sqrt{2}}{3}Q^2_{n-\frac{1}{2}}'(Cosh(\eta))$$

$$T_{part}(\eta,\theta)=\Delta(\eta)\sum_{n=0,+\infty}\varepsilon_n\Omega_n(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)\quad \varepsilon_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & si\ n=0\\ 1 & si\ n>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_{\text{int}}(\eta,\theta)=\Delta(\eta)\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}\varepsilon_n\left(\Omega_n(Cosh(\eta))+A_n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\right)Cos(n\vartheta)\\ T_{ext}(\eta,\theta)=\Delta(\eta)\displaystyle\sum_{n=0,+\infty}\varepsilon_nB_n\frac{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}Cos(n\vartheta)\end{cases}$$

$$\text{Continuité}\Rightarrow\Omega_n(Cosh(l_\eta))+A_n=B_n\quad\text{Continuité de la dérivée première }\left.\frac{\partial T_{\text{int}}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}=\left.\frac{\partial T_{ext}(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=l_\eta}$$

$$\Rightarrow\Delta'(\eta)\sum_{n=0,+\infty}\varepsilon_n\left(\Omega_n(Cosh(\eta))+A_n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\right)Cos(n\vartheta)+$$

$$+\Delta(\eta)\sum_{n=0,+\infty}\varepsilon_n\left(\Omega_n(Cosh(\eta))+A_n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\right)'Cos(n\vartheta)=$$

$$=\Delta'(\eta)\sum_{n=0,+\infty}\frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\varepsilon_nP_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)+\Delta(\eta)\sum_{n=0,+\infty}\frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\left(P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)'\varepsilon_nCos(n\vartheta)$$

$$\left(\Omega_n(Cosh(\eta))+A_n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\right)'=\frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\left(P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)'$$

$$\Rightarrow Sinh(l_\eta)\left(\Omega_n'(Cosh(l_\eta))+A_n\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\right)=Sinh(l_\eta)B_n\frac{P_{n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Omega_n(Cosh(l_\eta))+A_n=B_n\\ \Omega_n'(Cosh(l_\eta))+A_n\dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_\eta))}{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}=B_n\dfrac{P_{n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_\eta))}{P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}\end{cases}$$

On résout aisément ce système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} B_n = \Omega_n\left(Cosh(l_\eta)\right) + A_n \qquad \Omega_n'\left(Cosh(l_\eta)\right) + A_n \dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} = \left(\Omega_n\left(Cosh(l_\eta)\right) + A_n\right)\dfrac{P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} \end{cases}$$

$$\Omega_n'\left(Cosh(l_\eta)\right) - \Omega_n(\eta)\frac{P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} = A_n\left(\frac{P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} - \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\right)$$

De plus $\dfrac{P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} - \dfrac{Q_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} = \dfrac{1}{Sinh^2(l_\eta)P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}$

et $Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right) = \dfrac{1}{Sinh^2(l_\eta)} + P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)Q_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)$

$$\frac{A_n}{Sinh^2(l_\eta)P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} = \frac{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\Omega_n'\left(Cosh(l_\eta)\right) - \Omega_n(\eta)P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n = Sinh^2(l_\eta)Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\left(P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\Omega_n'\left(Cosh(l_\eta)\right) - P_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)\Omega_n\left(Cosh(l_\eta)\right)\right) \\ B_n = Sinh^2(l_\eta)P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\left(Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\Omega_n'\left(Cosh(l_\eta)\right) - Q_{n-\frac{1}{2}}'\left(Cosh(l_\eta)\right)\Omega_n\left(Cosh(l_\eta)\right)\right) \end{cases}$$

.

Les solutions intérieure et extérieure s'écrivent donc :

$$\begin{cases} a_n = P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))Q^2_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta)) - P_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta))Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \\ b_n = Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))Q^2_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta)) - Q_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta))Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \end{cases} \quad Posons\ \delta_n = 2\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & si\ n=0 \\ 2 & si\ n>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{int}(\eta,\theta) = -\rho a^2 \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \sum_{n=0,+\infty} \delta_n \left(Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + Sinh^2(l_\eta) a_n Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \right) Cos(n\vartheta) \\ T_{ext}(\eta,\theta) = -\rho a^2 \frac{4\sqrt{2}}{3} Sinh^2(l_\eta)\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \sum_{n=0,+\infty} \delta_n b_n P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) Cos(n\vartheta) \end{cases}$$

$$P_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta)) = P^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) = \frac{P^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{Sinh(l_\eta)}$$

$$Q_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta)) = Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) = \frac{Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{Sinh(l_\eta)}$$

$$Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = Sinh^2(\eta) Q^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$Q^3_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = Sinh^3(\eta) Q^{(3)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow Q^2_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(\eta)) = \frac{2Sinh(\eta)Cosh(\eta)Q^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + Sinh^3(\eta)Q^{(3)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Sinh(\eta)}$$

$$\Rightarrow Q^2_{n-\frac{1}{2}}{}'(Cosh(l_\eta)) = \frac{2Cosh(l_\eta)Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) + Sinh(l_\eta)Q^3_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))}{Sinh^2(l_\eta)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\left(2Cosh(l_\eta)Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) + Sinh(l_\eta)Q^3_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \right) - Sinh(l_\eta)P^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \\ b_n = Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))\left(2Cosh(l_\eta)Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) + Sinh(l_\eta)Q^3_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \right) - Sinh(l_\eta)Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{int}(\eta,\theta) = -\rho a^2 \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \sum_{n=0,+\infty} \delta_n \left(Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + a_n Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \right) Cos(n\vartheta) \\ T_{ext}(\eta,\theta) = -\rho a^2 \frac{4\sqrt{2}}{3}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} \sum_{n=0,+\infty} \delta_n b_n P_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) Cos(n\vartheta) \end{cases}$$

Dans un article récent de 2018 « Exact gravitational potential of a homogeneous torus in toroidal coordinates », l'auteur M.Majic utilise une autre solution particulière de la forme :

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\frac{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^2} = a^2\frac{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^2} = a^2\frac{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

$$x^2+y^2+z^2+a^2 = 2a^2\frac{Cosh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

$$\Delta T_{part} = -4\pi\rho \Rightarrow T_{part}(x,y,z) = -\frac{4\pi\rho}{6}\left(x^2+y^2+z^2+a^2\right) = -\frac{4\pi\rho a^2}{3}\frac{Cosh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

Ce faisant on, a abaisser d'un degré le dénominateur de la solution particulière. La décomposition de Fourier de cette solution particulière est la suivante :

$$T_{part}(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\sum_{n=0,+\infty}\varepsilon_n B_n Cos(n\vartheta)Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \qquad \delta_n=2\varepsilon_n$$

$$\Rightarrow f(\theta)=-\frac{4\pi\rho a^2}{3}\frac{Cosh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\Rightarrow B_n=-\frac{4\pi\rho a^2 Cosh(\eta)}{3}\int_0^{2\pi}d\vartheta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

$$De\ plus\quad Q^m_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{(-1)^m}{\sqrt{2}}Sinh^m(\eta)\frac{(2m-1)!}{2^{2m}(m-1)!}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{Cos(n\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{m+\frac{1}{2}}}\quad m\ entier$$

$$\Rightarrow m=1\qquad Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=-\frac{Sinh(\eta)}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{Cos(n\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow\int_0^{2\pi}d\theta\frac{Cos(n\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4\sqrt{2}}{Sinh(\eta)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\Rightarrow B_n=\frac{16\pi\rho a^2 Cosh(\eta)}{3Sinh(\eta)}\sqrt{2}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T_{part}(\eta,\theta)=\frac{8\pi\rho a^2 Cosh(\eta)}{3Sinh(\eta)}\sqrt{2}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\sum_{n=0,+\infty}\delta_n Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$D'autre\ part\begin{cases}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=Sinh(\eta)Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\\ Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=Sinh^2(\eta)Q^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\end{cases}\quad {}^{(1)}\ {}^{(2)}d\acute{e}signent\ les\ d\acute{e}riv\acute{e}es\ premi\grave{e}re\ et\ seconde$$

$$\Rightarrow T_{part}(\eta,\theta)=\frac{8\pi\rho a^2 Cosh(\eta)}{3}\sqrt{2}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\sum_{n=0,+\infty}\delta_n Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow\Omega_n(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}Cosh(\eta)Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow\Omega_n'(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\left(Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+Cosh(\eta)Q^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)$$

$$\Rightarrow\Omega_n'(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{Sinh(\eta)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}Q^2_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)$$

Ou bien en utilisant l'équation de Legendre

$$Q^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(\xi)=\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(\xi)\left(n^2-\frac{1}{4}\right)-2\xi Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(\xi)}{\xi^2-1}\Rightarrow Q^{(2)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\left(n^2-\frac{1}{4}\right)-2Cosh(\eta)Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Sinh^2(\eta)}$$

$$\Rightarrow\Omega_n'(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\left(Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\left(Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\left(n^2-\frac{1}{4}\right)-2Cosh(\eta)Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)\right)$$

$$\Rightarrow\Omega_n'(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1+Cosh^2(\eta)}{Sinh^2(\eta)}Q^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\left(n^2-\frac{1}{4}\right)Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)$$

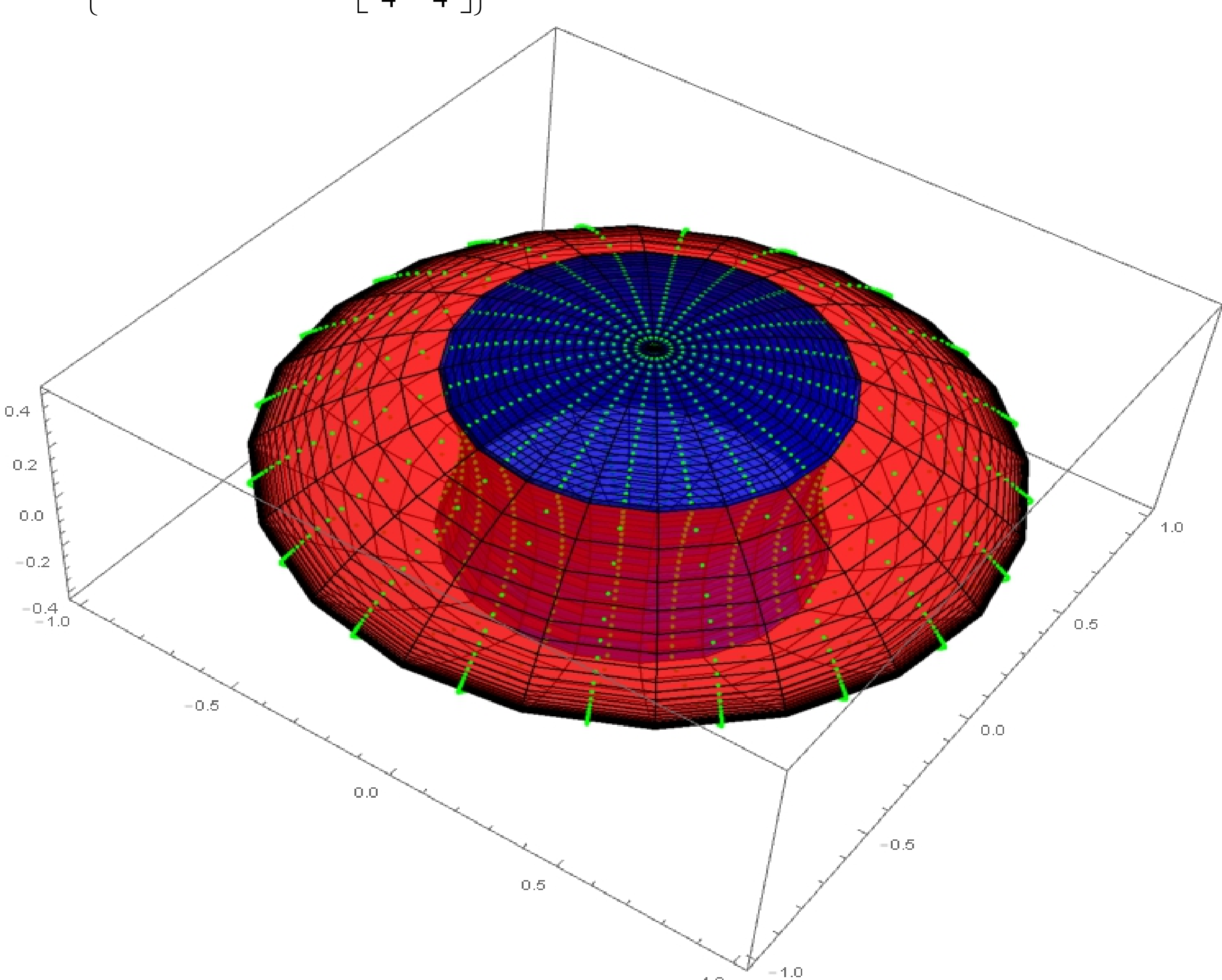
$$\Rightarrow\begin{cases}\Omega_n(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\\ \Omega_n'(Cosh(\eta))=\frac{8\pi\rho a^2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{1+Cosh^2(\eta)}{Sinh^3(\eta)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))+\frac{Cosh(\eta)}{Sinh^2(\eta)}\left(n^2-\frac{1}{4}\right)Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)\end{cases}$$

.

Solution sur une lentille sphérique symétrique assimilable à un problème homogène angulaire

Supposons que l'on complète la lentille sphérique trouée définie par le domaine :

$$\Omega_2 = \left\{ (\eta,\theta) / \eta \in \left[l_{\eta 0}, \infty \right], \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right\}$$



Et que le domaine complémentaire représente la zone en bleu sur le schéma ci dessus.

$$\Omega_1 = \left\{ (\eta,\theta) / \eta \in \left[0, l_{\eta 0} \right], \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right\}$$

On définie le problème aux limites suivant sur la réunion des deux domaines :

$$\Delta T(\eta,\theta) = 0 \quad (\eta,\theta) \in \Omega = \{ \eta \in [0,+\infty], \theta \in [\pi - \alpha_0, \pi + \alpha_0] \} \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \quad l_{\eta 0} = 1$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta \in [0, l_{\eta 0}] \\ \theta = \pi - \alpha_0}} = T_0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta \in [l_{\eta 0}, +\infty] \\ \theta = \pi - \alpha_0}} = 0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta \in [0, l_{\eta 0}] \\ \theta = \pi + \alpha_0}} = T_0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta \in [l_{\eta 0}, +\infty] \\ \theta = \pi + \alpha_0}} = 0$$

Soit donc une valeur T0 sur la surface de la zone centrale de la lentille, 0 ailleurs sur la surface extérieure.

Sur le domaine : $\Omega_2 = \{(\eta,\theta)/\eta \in [\eta_0,\infty],\theta \in [\pi-\alpha_0,\pi+\alpha_0]\}$, le problème aux limites est homogène en angle avec une fonction limite constante à définir, il se ramène donc à la catégorie de problème de cette section. Le problème aux limites sur le domaine $\Omega_1 = \{(\eta,\theta)/\eta \in [0,\eta_0],\theta \in [\pi-\alpha_0,\pi+\alpha_0]\}$ se ramène à un problème homogène angulaire en retranchant la solution constante comme ceci :

$$T(\eta,\theta) = T_0 + T_{\Omega 1}(\eta,\theta)$$

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\pi-\alpha_0}} = 0 \qquad T_{\Omega 1}(\eta,\theta)_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\pi+\alpha_0}} = 0$$

Il devient alors évident que l'on a déjà rencontré ce genre de problème aux limites dans différentes configuration géométriques : système polaire, sphérique, sphéroïdal allongé et aplati. On va donc utiliser le même procédé de construction.

Le problème aux limites se résume donc au suivant :

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta) = T_0 + \widetilde{T}_{\Omega 1}(\eta,\theta)$$

$$\widetilde{T}_{\Omega 1}(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\pi-\alpha_0}} = 0 \qquad \widetilde{T}_{\Omega 1}(\eta,\theta)_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\pi+\alpha_0}} = 0$$

$$T_{\Omega 2}(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\pi-\alpha_0}} = 0 \qquad T_{\Omega 2}(\eta,\theta)_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\pi+\alpha_0}} = 0$$

Avec comme contrainte le respect des conditions de continuité et de continuité de la dérivée première à l'interface des deux domaines :

$$T_0 + \widetilde{T}_{\Omega 1}(l_{\eta 0},\theta) = T_{\Omega 2}(l_{\eta 0},\theta)$$

$$\frac{Cosh(l_{\eta 0}) - Cos(\theta)}{c}\frac{\partial \widetilde{T}_{\Omega 1}(l_{\eta 0},\theta)}{\partial \eta} = \frac{Cosh(l_{\eta 0}) - Cos(\theta)}{c}\frac{\partial T_{\Omega 2}(l_{\eta 0},\theta)}{\partial \eta} \Leftrightarrow \frac{\partial \widetilde{T}_{\Omega 1}(l_{\eta 0},\theta)}{\partial \eta} = \frac{\partial T_{\Omega 2}(l_{\eta 0},\theta)}{\partial \eta}$$

La solution dans les domaines respectifs se développe en série de sinus comme suit :

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta) = T_0 + \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\alpha_0}\sum_{n=1,+\infty} A_n \frac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))} Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi))$$

$$T_{\Omega 2}(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\alpha_0}\sum_{n=1,+\infty} B_n \frac{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))} Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi))$$

Il faut également trouver une formule de décomposition du terme constant T0 (soit l'unité), à partir d'un problème aux limites simple sur [0,lη0] sans le calculer explicitement, nous avons:

$$1 = \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\alpha_0}\sum_{n=1,+\infty} U_n(\eta) Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi)) \quad U_n(Cosh(\eta)) = \int_{\pi-\alpha_0}^{\pi+\alpha_0} d\vartheta \frac{Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi))}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}$$

$$Sin(2\lambda_n\alpha_0) = 0 \Rightarrow \lambda_n = n\frac{\pi}{2\alpha_0} \quad U_n(Cosh(\eta)) = \int_0^{2\alpha_0} d\vartheta \frac{Sin(\lambda_n\theta)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta+\pi-\alpha_0)}}$$

$$U_n'(Cosh(\eta)) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\alpha_0} d\vartheta \frac{Sin(\lambda_n\theta)}{(Cosh(\eta) - Cos(\theta+\pi-\alpha_0))^{\frac{3}{2}}}$$

.

Ce qui donne le système linéaire suivant en appliquant les deux conditions de continuité :

$$\begin{cases} T_{\Omega 1}(\eta,\theta)=\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\alpha_0}\displaystyle\sum_{n=1,+\infty}\left(U_n(Cosh(\eta))+A_n\dfrac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}\right)Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi)) \\ T_{\Omega 2}(\eta,\theta)=\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\alpha_0}\displaystyle\sum_{n=1,+\infty}B_n\dfrac{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi)) \quad Posons\,\Delta(\eta)=\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\alpha_0} \end{cases}$$

$$T_{\Omega 1}(\eta,\theta)=\Delta(\eta)\sum_{n=1,+\infty}\left(U_n(Cosh(\eta))+A_n\frac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}\right)Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi))$$

$$T_{\Omega 2}(\eta,\theta)=\Delta(\eta)\sum_{n=1,+\infty}B_n\frac{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}Sin(\lambda_n(\theta+\alpha_0-\pi))$$

$$Continuité\ simple \Rightarrow U_n(Cosh(\eta))+A_n=B_n \Rightarrow A_n=B_n-U_n(Cosh(l_{\eta 0}))$$

$$Continuité\ de\ la\ dérivée \Rightarrow A_n\frac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}+U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))=B_n\frac{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))}{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}$$

$$B_n\left(\frac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}-\frac{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))}{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}\right)=-U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))+U_n(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}$$

$$De\ plus\ P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(\eta))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))=\frac{1}{Sinh^2(l_{\eta 0})} \quad Wronskien$$

$$\Rightarrow B_n=Sinh^2(l_{\eta 0})Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\left(U_n(Cosh(l_{\eta 0}))P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))-U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\right)$$

$$\Rightarrow A_n=Sinh^2(l_{\eta 0})Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\left(U_n(Cosh(l_{\eta 0}))P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))-U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\right)-U_n(Cosh(l_{\eta 0}))$$

$$A_n=Sinh^2(l_{\eta 0})P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\left(U_n(Cosh(l_{\eta 0}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))-Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))\right)$$

$$Soit\begin{cases} A_n=Sinh^2(l_{\eta 0})P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\left(U_n(Cosh(l_{\eta 0}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))-Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))\right) \\ B_n=Sinh^2(l_{\eta 0})Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\left(U_n(Cosh(l_{\eta 0}))P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}'(Cosh(l_{\eta 0}))-U_n'(Cosh(l_{\eta 0}))P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))\right) \end{cases}$$

.

Injecter dans les solutions cherchées, il vient :

$$\begin{cases} a_n = U_n\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}{}'\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right) - Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)U_n{}'\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right) \\ b_n = U_n\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}{}'\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right) - U_n{}'\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right)P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}\left(Cosh\left(l_{\eta 0}\right)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{\Omega 1}(\eta,\theta) = \dfrac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\alpha_0} \displaystyle\sum_{n=1,+\infty} \left(U_n\left(Cosh(\eta)\right) + a_n Sinh^2\left(l_{\eta 0}\right) P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) \right) Sin\left(\lambda_n\left(\theta + \alpha_0 - \pi\right)\right) \\ T_{\Omega 2}(\eta,\theta) = Sinh^2\left(l_{\eta 0}\right) \dfrac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\alpha_0} \displaystyle\sum_{n=1,+\infty} b_n Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) Sin\left(\lambda_n\left(\theta + \alpha_0 - \pi\right)\right) \end{cases}$$

$$U_n\left(Cosh(\eta)\right) = \int_0^{2\alpha_0} d\vartheta \frac{Sin(\lambda_n\theta)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos\left(\theta + \pi - \alpha_0\right)}}$$

$$U_n{}'\left(Cosh(\eta)\right) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\alpha_0} d\vartheta \frac{Sin(\lambda_n\theta)}{\left(Cosh(\eta) - Cos\left(\theta + \pi - \alpha_0\right)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

.

Problème intérieur de Dirichlet à trois dimensions avec dépendance azimutale : équivalence des solutions en R-Séparabilité-1 et R-Séparabilité-2

La solution de R-séparabilité-1 en trois dimensions donnent pour une condition aux limites paires en ϑ et ϕ:

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)=\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

$$A_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f(\theta,\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right).$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m}=B_nC_m\rightarrow B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\quad C_m=\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f(\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

$$Or\ B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\sqrt{2}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}C_m\,\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

.

La solution de R-séparabilité-1 en trois dimensions donnent pour une condition aux limites impaires en ϑ et ϕ:

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)=\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

$$A_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f(\theta,\varphi)Sin(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right).$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m} = B_n C_m \rightarrow B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \, \frac{Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} \quad C_m = \int_0^{2\pi} d\varphi \, f(\varphi) \, Sin(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2} \left(\sum_{n=0,+\infty} \sum_{m=0,+\infty} \frac{B_n C_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})} \frac{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} Sin(n\vartheta) Sin(m\varphi) \right)$$

R-séparabilité 2 : problème intérieur dépendant des variables η, ϑ et φ :

D'après le tableau des solutions finies la solution s'écrit pour des conditions aux limites paire en ϑ et φ *:*

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}} \left(\sum_{n=0,+\infty} \sum_{m=0,+\infty} A_{n,m} P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right) Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi) \right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\eta=l_\eta} = f(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}{Sinh(l_\eta)}} \sum_{n=0,+\infty} \sum_{m=0,+\infty} A_{n,m} P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right) Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi)$$

$$A_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \, \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \, f(\theta,\varphi) \, Cos(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2} \sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}} \left(\sum_{n=0,+\infty} \sum_{m=0,+\infty} \frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})} \frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)} Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi) \right)$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m} = B_n C_m \rightarrow B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \, \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} \quad C_m = \int_0^{2\pi} d\varphi \, f(\varphi) \, Cos(m\varphi)$$

$$Or \; B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = 2\sqrt{2} Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = 2\sqrt{2} \, \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2} \sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}} \left(\sum_{n=0,+\infty} \sum_{m=0,+\infty} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right) C_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})} \frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)} Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi) \right)$$

avec la formule de Whipple

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right) = \frac{\Gamma\left(m - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m + n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{2}{\pi \, Sinh(l_\eta)} \right)^{1/2} P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{\frac{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}{\pi \, Sinh(\eta)}} \left(\sum_{n=0,+\infty} \sum_{m=0,+\infty} C_m \frac{\Gamma\left(m - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m + n + \frac{1}{2}\right)} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)} \frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})} \times \times Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi) \right)$$

En appliquant une fois de plus la formule de Whipple sur le terme :

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sinh(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}}P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)$$

.

Il vient :

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}C_m\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\frac{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

Ce qui est exactement la formule obtenue avec la R-Séparabilité-1 !

La solution pour une condition aux limites impaire en ϑ et φ *se développerait comme suit :*

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\Big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(l_\eta)}}\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)$$

$$A_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\int_0^{2\pi}d\varphi\,f_\theta(\theta,\varphi)\,Sin(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m}=B_nC_m\rightarrow B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\quad C_m=\int_0^{2\pi}d\varphi\,f_\theta(\varphi)\,Sin(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{B_nC_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\ Sinh(l_\eta)}\right)^{\frac{1}{2}}P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2\sqrt{\pi}\sqrt{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{B_nC_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

En appliquant une fois de plus la formule de Whipple sur le terme :

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\, Sinh(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}} P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)$$

.

Il vient :

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{B_n C_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

Ce qui est encore exactement la formule obtenue avec la R-Séparabilité-1 !

Bon, en fait point de magie, si l'on tourne la formule de Whipple comme ceci :

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\, Sinh(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}} P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)$$

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(m-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\, Sinh(l_\eta)}\right)^{\frac{1}{2}} P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}=\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\,\frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}$$

C'est une formule redoutable reliant la R-Séparabilité-2 à la R-Séparabilité-1.

$$\underbrace{T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

$$\underbrace{T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{P^n_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{Q^m_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

Problème extérieur de Dirichlet : soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'extérieur d'un tore dont les conditions aux limites de Dirichlet dépendent des angles θ et φ, puis du seul angle θ :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi)=0 \quad (\eta,\theta,\varphi)\in\Omega=\{0<\eta\le l_\eta\} \quad T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=0}\,fini$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)$$

$$ou\,bien$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta)$$

Le problème en coordonnées toroïdales se présente donc comme un ***problème intérieur***, du fait du paramétrage du système de coordonnées. *On doit également tenir compte des contraintes de ce problème :*

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ fini, ne\ comporte\ aucune\ singularité, continue\ et\ dérivable$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ périodique\ en\ \theta\ de\ période\ 2\pi\ soit\ T(\eta,\theta,\varphi)=T(\eta,\theta+2\pi,\varphi)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\ périodique\ en\ \theta\ de\ période\ 2\pi\ soit\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta}=\frac{\partial T(\eta,\theta+2\pi,\varphi)}{\partial\theta}$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\ périodique\ en\ \varphi\ de\ période\ 2\pi\ soit\ T(\eta,\theta,\varphi)=T(\eta,\theta,\varphi+2\pi)$$

$$\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\ périodique\ en\ \varphi\ de\ période\ 2\pi\ soit\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi+2\pi)}{\partial\varphi}$$

R-séparabilité 1 problème extérieur de Dirichlet

Cela conduit au choix d'une partie radiale décroissante en η et finie pour la valeur η=0, et des parties angulaires possédant des valeurs propres n et m entières, soit une solution qui se développe sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}$$

$$\left(B_0\,P_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\sum_{n=1,+\infty}\sum_{m=1,+\infty}P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\big(A_{n,m}Cos(n\vartheta)+B_{n,m}Sin(n\theta)\big)\big(C_{n,m}Cos(m\varphi)+D_{n,m}Sin(m\varphi)\big)\right)$$

Lorsque les conditions aux limites ne dépendent pas de φ. La solution s'écrit :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(B_0\,P_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\sum_{n=1,+\infty}P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\big(A_nCos(n\vartheta)+B_nSin(n\theta)\big)\right)$$

Limitons nous au cas sans dépendance en φ. Lorsque les conditions aux limites angulaires sont paires, alors la solution se développe en série :

$$f(\theta,\varphi)=f(\theta)\quad et\quad f(-\theta)=f(\theta)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(B_0\,P_{-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)+\sum_{n=1,+\infty}A_nCos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\right).$$

Dans le cas de conditions aux limites impaires :

$$f(\theta,\varphi)=f(\theta)\quad et\quad f(-\theta)=-f(\theta)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=1,+\infty}A_nSin(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\right).$$

Compte tenu des conditions aux limites, nous avons alors la solution générale pour des conditions aux limites de Dirichlet paires, $f_\theta(\theta)=f_\theta(-\theta)$, sous la forme :

$$\Theta_0(\theta)=1 \Rightarrow \|\Theta_0\|^2=2\pi$$

$$\Theta_n(\theta)=Cos(n\theta) \Rightarrow \|\Theta_n\|^2=\pi$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta)=\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}\left(A_0\,P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}A_n Cos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)\right)$$

$$B_0=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\,Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\int_0^{\pi}d\vartheta\,\frac{f_\theta(\theta)\,Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{B_0}{2\,P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+\sum_{n=1,+\infty}\frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

Avec le résultat

$$Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$pour\ n=0,1,2,3,...$$

Il vient pour la condition aux limites paires :

$$f_\theta(\theta)=1$$

$$B_0=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{1}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\sqrt{2}Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\sqrt{2}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{Q_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}P_{-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)\,P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)\right)$$

Normalement cette expansion converge vers une fonction décroissante et tendant vers 0 lorsque η->0.

La solution générale pour des conditions aux limites de Dirichlet impaires, $f_\theta(\theta)=-f_\theta(-\theta)$, se présente sous la forme :

$$\Theta_n(\theta) = Sin(n\theta) \Rightarrow \|\Theta_n\|^2 = \pi$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_\eta} = f_\theta(\theta) = \sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}\left(\sum_{n=1,+\infty} A_n Sin(n\vartheta)\, P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)\right)$$

$$B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\, \frac{f_\theta(\theta)\, Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = 2\int_{0}^{\pi} d\vartheta\, \frac{f_\theta(\theta)\, Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}}$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi}\left(\sum_{n=1,+\infty} \frac{B_n}{P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)}\, Sin(n\vartheta)\, P_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)\right).$$

La solution de R-séparabilité-1 pour des conditions aux limites paires en trois dimensions donnent :

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty} A_{n,m} P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big) Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta} = f(\theta,\varphi) = \sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty} A_{n,m} P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big) Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi)\right)$$

$$A_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\, \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} \int_{0}^{2\pi} d\varphi\, f(\theta,\varphi)\, Cos(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty} \frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\, \frac{P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)}{P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)} Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi)\right).$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m} = B_n C_m \rightarrow B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta\, \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} \qquad C_m = \int_{0}^{2\pi} d\varphi\, f(\varphi)\, Cos(m\varphi)$$

$$Or\ B_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta) - Cos(\theta)}} = 2\sqrt{2} Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi) = 2\sqrt{2}\, \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty} \frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big) C_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\, \frac{P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)}{P^m_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)} Cos(n\vartheta) Cos(m\varphi)\right)$$

.

R-séparabilité 2 : problème extérieur dépendant des variables η et φ :

D'après le tableau des solutions finies la solution s'écrit pour une condition aux limites paire en ϑ et φ *:*

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(l_\eta)}}\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)$$

$$A_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f(\theta,\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m}=B_nC_m\rightarrow B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\qquad C_m=\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f(\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

$$Or\ B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\,\frac{Cos(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}=2\sqrt{2}Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)C_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

avec la formule de Whipple

$$P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\,Sinh(l_\eta)}\right)^{\frac{1}{2}}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(l_\eta)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{4}{\pi^2}\sqrt{\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{\pi\,Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\frac{C_mQ^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi\right.$$

En appliquant une fois de plus la formule de Whipple sur le terme :

$$P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi\,Sinh(\eta)}\right)^{\frac{1}{2}}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\left(Cotanh(\eta)\right)$$

.

Il vient :

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(l_\eta)\right)}\frac{C_mP^{m}_{n-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

Ce qui est exactement la formule obtenue avec la R-Séparabilité-1 !

La solution pour une condition aux limites impaire en ϑ et φ *se développerait comme suit*

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f_\theta(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(l_\eta)}}\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}A_{n,m}Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(l_\eta)\big)Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)$$

$$A_{n,m}=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f_\theta(\theta,\varphi)\,Sin(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(l_\eta)\big)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

Si la fonction limite ne dépend que de φ, il vient *:*

$$A_{n,m}=B_nC_m\to B_n=\int_{-\pi}^{\pi}d\vartheta\,\frac{Sin(n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}}\quad C_m=\int_{0}^{2\pi}d\varphi\,f_\theta(\varphi)\,Sin(m\varphi)$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{B_nC_m}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(l_\eta)\big)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

Comme toujours il y a une totale équivalence des formules de R-séparabilité-1 et R-séparabilité-2. La formule de Whipple combinée comme suit:

$$\frac{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)}{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)}=\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(l_\eta)\big)}$$

Il vient :

$$\underbrace{T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(l_\eta)\big)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)}{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)}Cos(n\vartheta)Cos(m\varphi)\right)$$

$$\underbrace{T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\sqrt{\frac{Sinh(l_\eta)}{Sinh(\eta)}}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(\eta)\big)}{Q^{n}_{m-\frac{1}{2}}\big(Cotanh(l_\eta)\big)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi^2}\left(\sum_{n=0,+\infty}\sum_{m=0,+\infty}\frac{A_{n,m}}{(1+\delta_{n,0})(1+\delta_{m,0})}\frac{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(\eta)\big)}{P^{m}_{n-\frac{1}{2}}\big(Cosh(l_\eta)\big)}Sin(n\vartheta)Sin(m\varphi)\right)$$

Remarques sur les fonctions propres sur des tores complets pleins en fonction de la décomposition par symétrie des conditions aux limites

Dans la présentation de quelques unes des solutions des problèmes aux limites inhomogènes de Dirichlet ou de Neumann (non traité ici), nous n'avons pas introduit la décomposition des fonctions limites sous forme de symétrique dans le plan polaire (soit pour un angle azimutal φ constant). Toutes les solutions présentées, pour autant que les calculs soient justes, sont évidemment dans une des catégories de symétrie Y±X±, du seul fait de la construction des fonctions propres angulaires à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

On décomposerait par exemple une fonction limite en ces quatre composantes de symétrie, dans un problème sans dépendance en φ (utilisation de la R-Séparabilité-1)

$$f(\theta) = f_{Y+,X+}(\theta) + f_{Y+,X-}(\theta) + f_{Y-,X+}(\theta) + f_{Y-,X-}(\theta), \quad sachant\,que \quad f(\theta) = f(2\pi+\theta)$$

$$f_{Y+,X+}(\theta) = \frac{f(\theta) + f(\pi-\theta) + f(-\theta) + f(\theta-\pi)}{4}$$

$$f_{Y+,X-}(\theta) = \frac{f(\theta) + f(\pi-\theta) - f(-\theta) - f(\theta-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X+}(\theta) = \frac{f(\theta) - f(\pi-\theta) + f(-\theta) - f(\theta-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X-}(\theta) = \frac{f(\theta) - f(\pi-\theta) - f(-\theta) + f(\theta-\pi)}{4}$$

On vérifie aisément que les fonctions construites vérifient bien les propriétés de symétrie :

$$f_{Y+,X+}(\theta) = f_{Y+,X+}(\pi-\theta) \quad et \quad f_{Y+,X+}(\theta) = f_{Y+,X+}(-\theta)$$

$$f_{Y+,X-}(\theta) = f_{Y+,X+}(\pi-\theta) \quad et \quad f_{Y+,X+}(\theta) = -f_{Y+,X+}(-\theta)$$

$$f_{Y-,X+}(\theta) = -f_{Y+,X+}(\pi-\theta) \quad et \quad f_{Y+,X+}(\theta) = f_{Y+,X+}(-\theta)$$

$$f_{Y-,X-}(\theta) = -f_{Y+,X+}(\pi-\theta) \quad et \quad f_{Y+,X+}(\theta) = -f_{Y+,X+}(-\theta)$$

Le tableau suivant indique les éléments pour la construction d'une solution par principe de superposition utilisant les fonctions de la R-Séparabilité-1 :

Symétrie angulaire en ϑ	Valeur propres λ_n	Fonctions propres angulaires et normes $\Phi_n(\theta)$	Normes des fonctions propres angulaires $\|\|\Phi_n(\theta)\|\|^2$	Fonctions radiales R-Séparabilité 1
Y+X+	2n	Cos(2nθ)	n=0->2π, n>0->π	$P_{2n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad Q_{2n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$.
Y+X-	2n+1	Sin((2n+1)θ)	π	$P_{2n+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad Q_{2n+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$.
Y-X+	2n+1	Cos((2n+1)θ)	π	$P_{2n+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad Q_{2n+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$.
Y-X-	2n	Sin(2nθ)	π	$P_{2n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad Q_{2n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$.

On pourrait compliquer à plaisir la construction en introduisant la décomposition symétrique similaire en angle azimutal dans le cas où la fonction limite présenterait une double dépendance en ϑ et φ, on obtiendrait 16 composantes en tout en introduisant les fonctions radiales de toroïdales associées d'ordre m supérieur, m étant la valeur propre azimutal utilisée.

Cependant il peut être utile d'exhiber la construction des fonctions en R-Séparabilité 2 avec le tableau correspondant pour une fonction limite qui n'a pas de dépendance en ϑ.

$$f(\varphi)=f_{Y+,X+}(\varphi)+f_{Y+,X-}(\varphi)+f_{Y-,X+}(\varphi)+f_{Y-,X-}(\varphi),\quad sachant\,que\quad f(\varphi)=f(2\pi+\varphi)$$

$$f_{Y+,X+}(\varphi)=\frac{f(\varphi)+f(\pi-\varphi)+f(-\varphi)+f(\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y+,X-}(\varphi)=\frac{f(\varphi)+f(\pi-\varphi)-f(-\varphi)-f(\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X+}(\varphi)=\frac{f(\varphi)-f(\pi-\varphi)+f(-\varphi)-f(\varphi-\pi)}{4}$$

$$f_{Y-,X-}(\varphi)=\frac{f(\varphi)-f(\pi-\varphi)-f(-\varphi)+f(\varphi-\pi)}{4}$$

Par ailleurs comme le développement en série de la solution implique nécessairement un terme dépendant de ϑ venant du terme de R-Séparation-2 suivant, la dépendance finale de la solution en ϑ et φ est inévitable :

$$T(\eta,\theta,\varphi)\big|_{\eta=l_\eta}=f(\varphi)\Rightarrow\sum_n\sum_m H(l_\eta)\Theta_n(\theta)\Psi_m(\varphi)=\frac{f(\varphi)}{R(l_\eta,\theta)}\quad R(\eta,\theta)=\sqrt{\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}}.$$

L'emploi des fonctions angulaire en ϑ est donc obligatoire, mais restreint à la seule valeur $\lambda_n=2n$, car la fonction limite est par essence de symétrie Y+X+ en ϑ (fonction constante à l'égard de ϑ). Le tableau suivant indique les éléments pour la construction d'une solution par principe de superposition utilisant les fonctions de la R-Séparabilité-2 :

Symétrie angulaire en *φ*	Valeurs propres λ_n,λ_m	Fonctions propres angulaires $\Phi_n(\vartheta)\Phi_m(\varphi)$	Normes des fonctions propres angulaires $\|\|\Phi_m(\varphi)\|\|^2$	Fonctions radiales R-Séparabilité 2
Y+X+	2n,2m	Cos(2nθ)Cos(2m*φ*)	n=0->2π, n>0->π m=0->2π, m>0->π	$P^{2n}_{2m-\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))\quad Q^{2n}_{2m-\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))$.
Y+X-	2n,2m+1	Cos(2nθ)Sin((2m+1)*φ*)	n=0->2π, n>0->π π	$P^{2n}_{2m+\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))\quad Q^{2n}_{2m+\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))$
Y-X+	2n,2m+1	Cos(2nθ)Cos((2m+1)*φ*)	n=0->2π, n>0->π π	$P^{2n}_{2m+\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))\quad Q^{2n}_{2m+\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))$
Y-X-	2n,2m	Cos(2nθ)Sin(2m*φ*)	n=0->2π, n>0->π π	$P^{2n}_{2m-\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))\quad Q^{2n}_{2m-\frac{1}{2}}(Cotanh(\eta))$

Remarque sur la solution du problème aux limites inhomogène de Neumann ou mixte de Robin

Concluons ce chapitre sur les problèmes aux limites sur un tore complet avec des conditions aux limites inhomogène de Neumann ou mixtes de Robin à la surface du tore. Le calcul n'est pas analytiquement plus complexe à représenter sachant qu'il faut tenir compte de l'expression du gradient en coordonnées toroïdales :

$$\overrightarrow{Grad}T(\eta,\theta,\varphi)=\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{c}\left\{\mathbf{1}_\eta\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\eta}+\mathbf{1}_\theta\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\mathbf{1}_\varphi\frac{1}{Sinh(\eta)}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right\}$$

$$Robin\ \alpha\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\vec{n}}+\beta T(\eta,\theta,\varphi)\bigg|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)\Rightarrow\ \alpha\frac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{c}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\eta}+\beta T(l_\eta,\theta,\varphi)\bigg|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)$$

$$Neumann\ \frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\eta=l_\eta}=f(\theta,\varphi)\Rightarrow\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=l_\eta}=\frac{c}{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}f(\theta,\varphi)$$

$$R(\eta,\theta)=\begin{cases}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} & R-séparabilité-1\\ \sqrt{\dfrac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{Sinh(\eta)}} & R-séparabilité-2\end{cases}$$

$$Robin\Rightarrow\sum_n\sum_m\begin{Bmatrix}\alpha\dfrac{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}{c}\left(R(l_\eta,\theta)\dfrac{dH(l_\eta)}{d\eta}+H(l_\eta)\dfrac{dR(l_\eta,\theta)}{d\eta}\right)+\\ +\beta R(l_\eta,\theta)H(l_\eta)\end{Bmatrix}\Theta_n(\theta)\Psi_m(\varphi)=f(\theta,\varphi)$$

$$Neumann\Rightarrow\sum_n\sum_m\left\{R(l_\eta,\theta)\frac{dH(l_\eta)}{d\eta}+H(l_\eta)\frac{dR(l_\eta,\theta)}{d\eta}\right\}\Theta_n(\theta)\Psi_m(\varphi)=\frac{c\,f(\theta,\varphi)}{Cosh(l_\eta)-Cos(\theta)}$$

.

Cela complique évidemment les calculs, mais ce n'est pas infaisable pour un problème en particulier.

Solutions des problèmes aux limites homogènes angulaires ϑ sur des sections « coniques » toroïdales

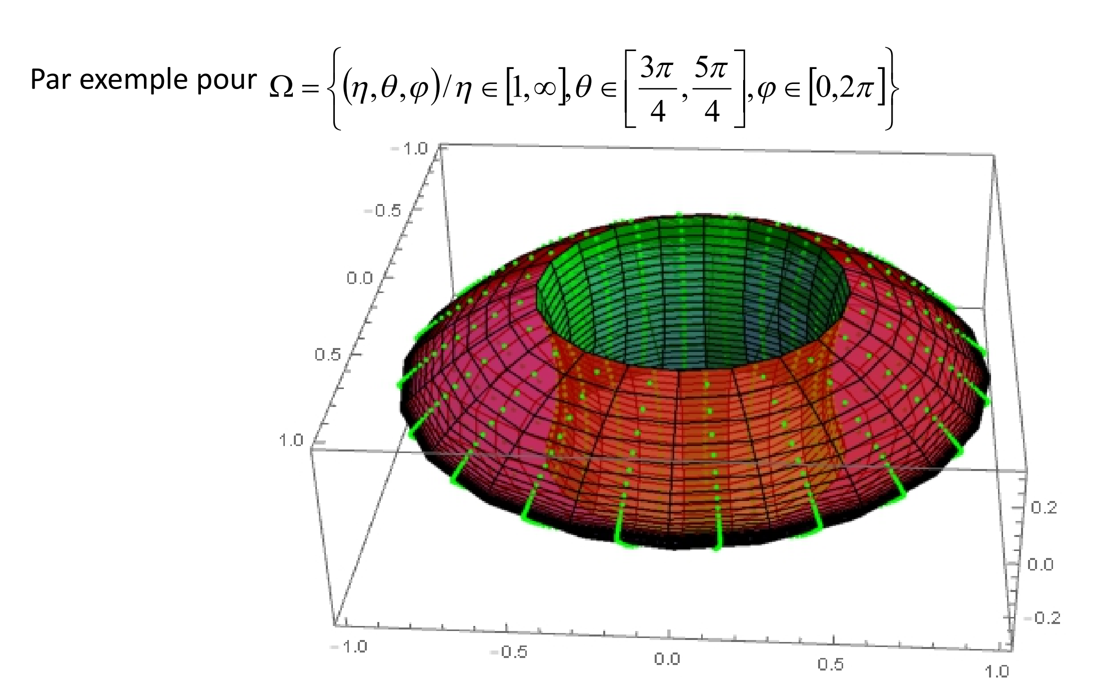
Jusqu'à présent nous n'avons aborder que les problèmes aux limites sur des domaines où les angles θ et ϕ balayent tout l'intervalle [0,2π] (tore complet). Considérons d'abord une restriction de valeurs sur l'angle θ. Dans ce cas la frontière du domaine est constituée par les iso-surfaces angulaires θ=Cste et une au moins des iso-surfaces radiales η=Cste. Si l'intervalle radial est complet η€[0,∞] alors la solution du problème de Dirichlet homogène est trivialement nul (domaine fermé, simplement connexe, principe du maximum et du minimum). Il en est de même pour une problème homogène de Neumann ou un problème mixte Neumann, Dirichlet sur l'une ou l'autre des iso-surfaces θ=Cste.

Soit à rechercher la solution de l'équation de Laplace à l'intérieur d'un domaine défini comme suit : $\Omega = \{(\eta,\theta,\varphi)/\eta \in [l_{\eta 1}, l_{\eta 2}], \theta \in [\theta_1,\theta_2], \varphi \in [0,2\pi]\}$. Et sur ce type de domaine on considère des conditions homogènes sur les deux iso-surfaces angulaire θ. De ce fait on reste dans la même catégorie de fonctions propres angulaires utilisées, les sinus et consimus mais avec des valeurs propres discrètes réelles.

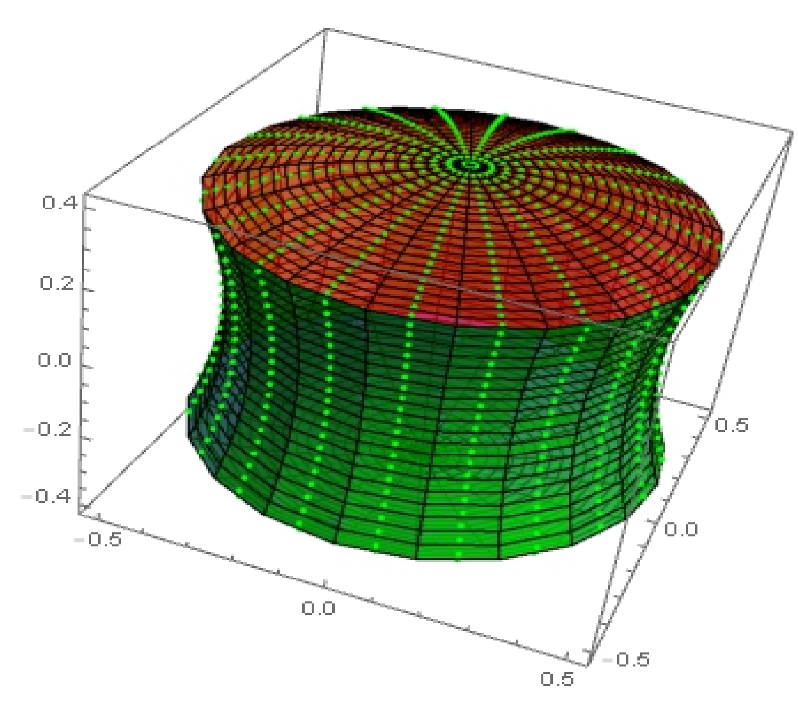
Il est important de noter que l'intervalle en coordonnée radiale a des formes limites : $[l_{\eta 1}, l_{\eta 2}] \quad ou \quad [l_{\eta 0}, +\infty] \quad ou \quad [0, l_{\eta 0}]$. Dans ces trois cas on peut assurer par construction séparable la finitude de la solution dans le domaine, ce qui n'est pas le cas pour l'intervalle complet η€[0,+∞]. Dans ce dernier cas à la section suivante, comme cas particuliers, on aborde la construction par des transformations intégrales dont les noyaux sont justement issue des fonctions propres de séparation. Dans la section suivante les autres cas abordent des conditions homogènes radiales et non angulaire (on passe alors des fonctions radiales toroïdales aux fonctions propres coniques de Mehler).

Quelques illustrations géométriques des domaines à l'étude

Par exemple pour $\Omega = \left\{(\eta,\theta,\varphi)/\eta \in [1,\infty], \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], \varphi \in [0,2\pi]\right\}$

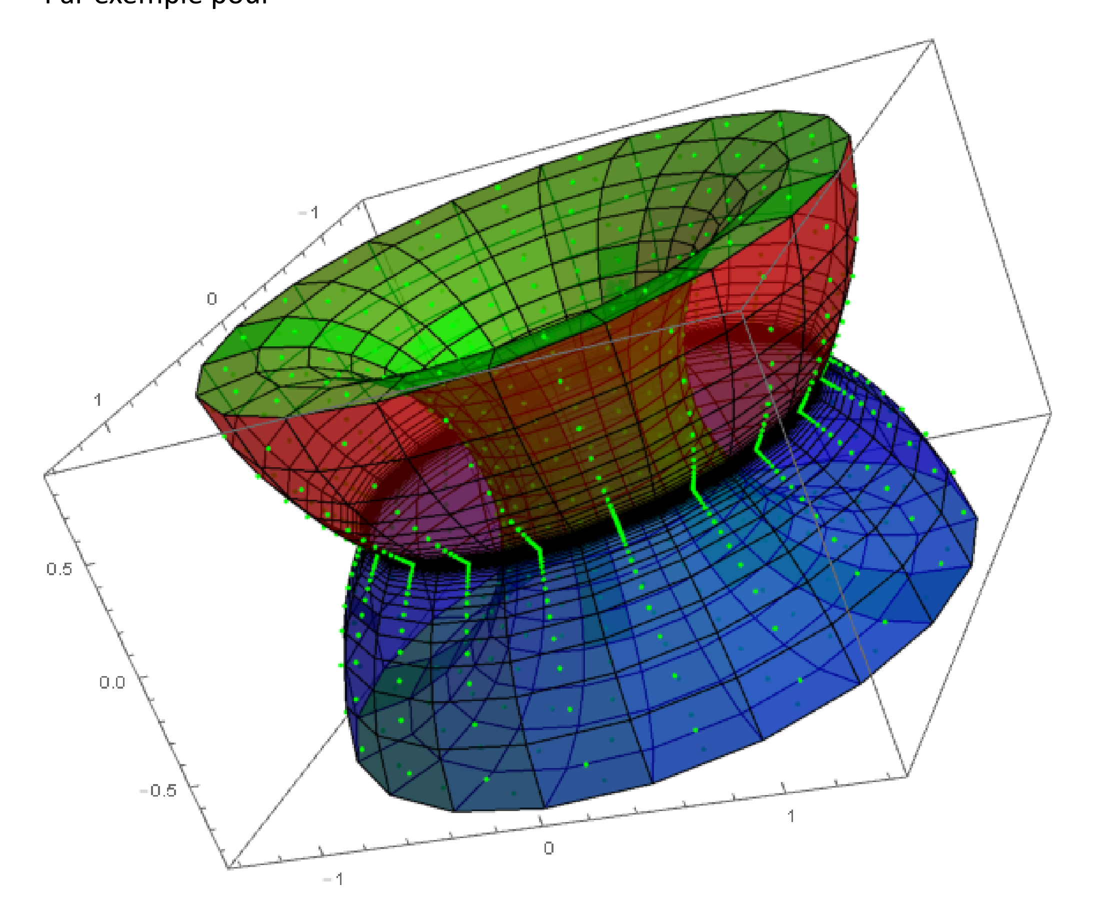


Par exemple pour $\Omega = \left\{(\eta,\theta,\varphi)/\eta \in [0,1], \theta \in \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right], \varphi \in [0,2\pi]\right\}$

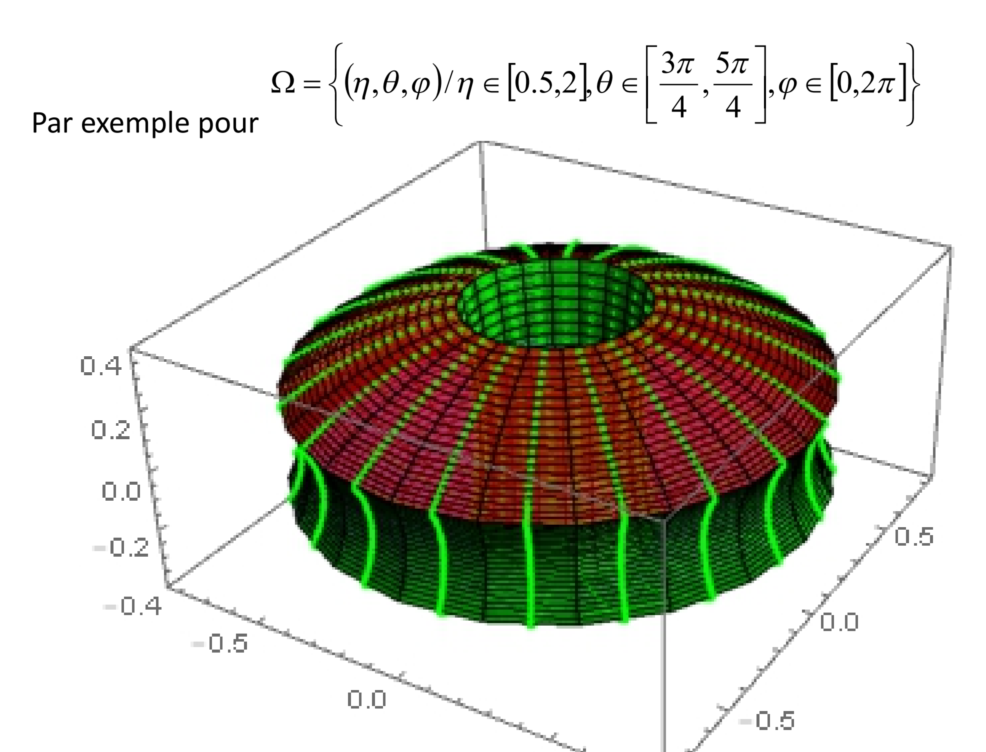


.

Par exemple pour $\Omega = \left\{(\eta,\theta,\varphi)/\eta \in [1,\infty], \theta \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right], \varphi \in [0,2\pi]\right\}$



Par exemple pour $\Omega = \left\{ (\eta, \theta, \varphi) / \eta \in [0.5, 2], \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$



Les conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann sont homogènes en angle et fixées radialement en paroi intérieure et extérieure à des valeur différentes :

$$\Delta T(\eta, \theta) = 0 \quad (\eta, \theta) \in \Omega = \{ \eta \in [l_{\eta 1}, l_{\eta 2}], \theta \in [\theta_1, \theta_2] \}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}] \\ \theta=\theta_1}} \\ ou\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}] \\ \theta=\theta_1}} \end{array} \right\} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}] \\ \theta=\theta_2}} \\ ou\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}] \\ \theta=\theta_2}} \end{array} \right\} = 0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 1} \\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}} = f_1(\theta) \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 2} \\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}} = f_2(\theta)$$

Pour des raisons de simplification de l'exposé, on se restreint aux conditions homogènes de Dirichlet sur les surfaces à distance fini et sans dépendance à l'angle azimutale φ.

Dans ce type de problème les solutions peuvent se développer sous forme de série, mais avec des valeurs propres angulaires non entières.

Solutions sur les domaines radiaux η€[lη0,+∞]

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\{\eta\in[l_{\eta 0},+\infty],\theta\in[\theta_1,\theta_2]\}$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 0},+\infty]\\ \theta=\theta_1}} \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 0},+\infty]\\ \theta=\theta_2}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 0}\\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=f(\theta) \quad T(\eta,+\infty)\Big| \quad finie$$

La solution se développe en série sous la forme suivante, compte tenu des conditions aux limites homogènes et de la condition de finitude :

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{\theta_2-\theta_1} \quad T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty}A_n Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))$$

l'application des conditions aux limites inhomogènes donne les calculs suivants :

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\eta=l_{\eta 0}}=f(\theta)=\sqrt{Cosh(l_{\eta 0})-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty}B_n Sin(\lambda_n\vartheta)Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_\eta))$$

$$\Theta_n(\theta)=Cos(\lambda_n\theta)\Rightarrow\|\Theta_n\|^2=\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\Rightarrow B_n=\frac{2}{\theta_2-\theta_1}\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\vartheta\frac{f(\theta)\,Sin(\lambda_n\vartheta)}{\sqrt{Cosh(l_{\eta 0})-Cos(\theta)}}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{2\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\theta_2-\theta_1}\sum_{n=1,+\infty}A_n\frac{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1)) \quad A_n=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\vartheta\frac{f(\theta)\,Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))}{\sqrt{Cosh(l_{\eta 0})-Cos(\theta)}}$$

.

Solutions sur les domaines radiaux η€[0,lη0]

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\{\eta\in[0,l_{\eta 0}],\theta\in[\theta_1,\theta_2]\}$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\theta_1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\theta_2}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 0}\\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=f(\theta) \quad T(\eta,0)\Big| \quad finie$$

La solution se développe en série avec les fonctions toroïdales de première espèce:

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{\theta_2-\theta_1} \quad T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty}A_n P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))$$

l'application des conditions aux limites inhomogènes donne les calculs suivants :

$$T(\eta,\theta)=\frac{2\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\theta_2-\theta_1}\sum_{n=1,+\infty}A_n\frac{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 0}))}Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1)) \quad A_n=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\vartheta\frac{f(\theta)\,Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))}{\sqrt{Cosh(l_{\eta 0})-Cos(\theta)}}$$

.

Solutions sur les domaines radiaux η€[l_{η1},l_{η2}]

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\Omega=\{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}],\theta\in[\theta_1,\theta_2]\}$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\theta_1}} \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta\in[0,l_{\eta 0}]\\ \theta=\theta_2}}=0$$

$$T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 1}\\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=f_1(\theta) \quad T(\eta,\theta)\Big|_{\substack{\eta=l_{\eta 2}\\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=f_2(\theta)$$

La solution se développe en série avec les fonctions toroïdales de première et deuxième espèce:

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\times \qquad \lambda_n=\frac{n\pi}{\theta_2-\theta_1}$$

$$\times\sum_{n=1,+\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}A_n\left(P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)+\\ -B_n\left(P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)\end{array}\right)\\ \times\dfrac{Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))}\end{array}\right\}.$$

L'application des conditions aux limites inhomogènes donne le résultat suivant :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n=1,+\infty}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}A_n\left(P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)+\\ -B_n\left(P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right)\end{array}\right)\\ \times\dfrac{Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))}{P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))-P_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 2}))Q_{\lambda_n-\frac{1}{2}}(Cosh(l_{\eta 1}))}\end{array}\right\}$$

$$A_n=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\vartheta\,\frac{f_1(\theta)\,Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))}{\sqrt{Cosh(l_{\eta 1})-Cos(\theta)}} \quad B_n=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\vartheta\,\frac{f_2(\theta)\,Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1))}{\sqrt{Cosh(l_{\eta 2})-Cos(\theta)}} \quad \lambda_n=\frac{n\pi}{\theta_2-\theta_1}$$

.

Solutions des problèmes aux limites inhomogènes angulaires ϑ sur des sections « coniques » toroïdales, conditions homogène radiales

Il s'agit d'aborder des problèmes sur des sections coniques (soit des coupoles sphériques) coupées par une au moins des iso-surfaces radiales. La géométrie des domaines est identique au cas précédent, seul l'homogénéité des conditions aux limites change. Cela entraîne le choix des fonctions sinus et cosinus hyperboliques angulaires pour respecter l'inhomogénéité des conditions aux limites angulaires. Cela entraine l'utilisation des fonctions coniques de Mehler en dimension radiale. La question est donc : peut-on construire un système de valeurs propres uniquement discrètes et de fonctions propres de type conique de Mehler respectant les conditions aux limites radiales homogènes imposées sur l'une au moins des iso-surfaces radiales. Cette discussion est tout à fait similaire au cas des coordonnées sphéroïdales allongées ou aplaties.

Les conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann sont homogènes radialement et inhomogènes en angle à des valeur différentes. *Pour des raisons de simplification de l'exposé, on se restreint aux conditions homogènes ou inhomogènes de Dirichlet sur les surfaces à distance fini et sans dépendance à l'angle azimutale φ.* Trois problèmes peuvent être envisagés :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0$$

$$\begin{cases}(\eta,\theta)\in\Omega=\begin{cases}\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}],\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]\end{cases}\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in l_{\eta1}\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=0\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in l_{\eta2}\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=0\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}]\\\theta=\theta_1}}=f_1(\eta)\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}]\\\theta=\theta_2}}=f_2(\eta)\end{cases}\quad ou\quad \begin{cases}(\eta,\theta)\in\Omega=\begin{cases}\eta\in[l_{\eta},+\infty],\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]\end{cases}\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in l_{\eta}\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=0\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}]\\\theta=\theta_1}}=f_1(\eta)\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}]\\\theta=\theta_2}}=f_2(\eta)\end{cases}\quad ou\quad \begin{cases}(\eta,\theta)\in\Omega=\begin{cases}\eta\in[0,l_{\eta}],\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]\end{cases}\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in l_{\eta}\\\theta\in[\theta_1,\theta_2]}}=0\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}]\\\theta=\theta_1}}=f_1(\eta)\\ T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta1},l_{\eta2}]\\\theta=\theta_2}}=f_2(\eta)\end{cases}$$

Les solutions par séparation sont construites à partir des fonctions suivantes :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(A\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))+B\,Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\right)(C\,Cosh(\tau\theta)+D\,Sinh(\tau\theta))$$

$$ou\,encore$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(A\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))+B\,Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\right)(C\,Sinh(\tau(\theta-\theta_1))+D\,Sinh(\tau(\theta_2-\theta)))$$

La finitude des solutions est gouvernée par les propriétés asymptotiques des fonctions coniques de Mehler), à savoir notamment la valeur en z=1, et z=∞ . Ces deux cas limites ont la conséquence cruciale d'éliminer la condition aux limites homogènes correspondantes :

$$Q_\nu(z)\approx-\frac{Log(z-1)}{2\Gamma(\nu+1)}+\frac{\frac{Log(2)}{2}-\gamma-\psi(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}+O(z-1)\quad z\approx1^+$$

$$\gamma\ Constante\ d'Euler\quad \psi(\nu)\quad fonction\ Digamma$$

$$\Rightarrow \underset{\eta\to1^+}{Lim}\,Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\infty\quad et\quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(1)=1\qquad \underset{z\to+\infty}{Lim}\,Q_\nu(z)=0\quad et\quad \underset{z\to+\infty}{Lim}\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)=0$$

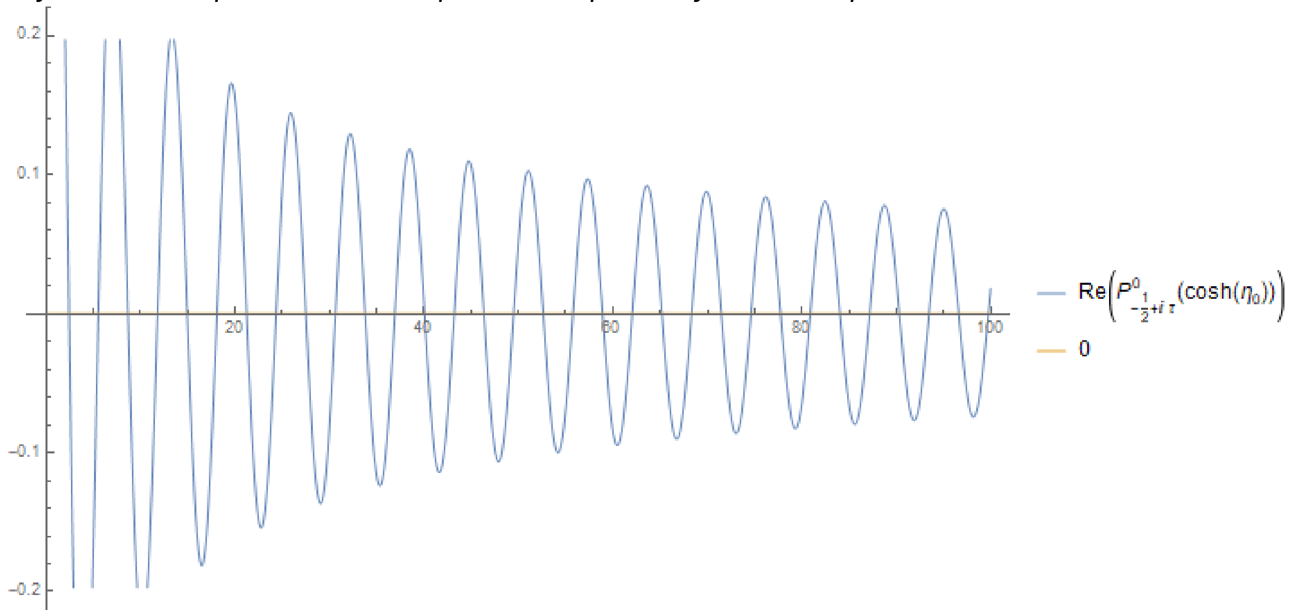
.

Discussion sur le cas de l'intervalle η€[0,$l_{\eta 0}$], z=Cosh(η)->z€[1,z_0] (voir système sphéroïdal):

La condition aux limites homogène en z=1 n'est plus de mise, remplacée par la condition de finitude. On peut donc écarter les fonctions de coniques de Mehler de deuxième espèce divergente en z=1, il reste à construire les solutions avec celles de première espèce. *On a vu dans le système sphéroïdal qu'il s'agissait d'un problème de Sturm-Liouville singulier mais qu'il possédait les bonnes propriétés pour assurer l'*existence d'un système de fonctions propres complet et orthogonal. Par construction on peut vérifier numériquement que les solutions de l'équation *transcendantale suivante existent :* $\tau_n \quad tel\ que\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_0)=0 \quad z_0 = Cosh(l_{\eta 0})$

Par exemple pour une valeur z0=Cosh(1), il vient les valeurs propres suivantes , τ_n=2.42138, 5.52719, 8.65826, 11.7949, 14.9335, 18.0732, 21.2135, 24.3541, 27.4949, 30.6359, …

On peut illustrer graphiquement l'existence des solutions de l'équation transcendantale en traçant la fonction conique de Mehler de première espèce en fonction du paramètre τ.



Discussion sur le cas de l'intervalle η€[$l_{\eta 1}$, $l_{\eta 2}$], z=Cosh(η) -> z€[z1=Cosh($l_{\eta 1}$),z2=Cosh($l_{\eta 2}$)] (voir système sphéroïdal) :

Dans ce cas le problème de Sturm-Liouville devient régulier avec des valeurs propres négatives (entraînant des paramètres imaginaires pour les fonctions propres), il existe un spectre discret de valeurs propres et un système orthogonal et complet de fonctions propres . Les valeurs propres peut être construites par la résolution d'une équation transcendantale comme suit pour un problème homogène de Dirichlet en $l_{\eta 1}$ et $l_{\eta 2}$:

$$Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x) = \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x)\right) \qquad \tau_n \quad tel\ que\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2})) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2}))Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))$$

On peut démontrer que l'expression de l'équation transcendantale en utilisation la fonction de Legendre Q est identique en raison de sa réalité :

$$\forall x_1, x_2 \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_1)Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_2)Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_1) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_1)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_2) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_2)Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(x_1) \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \tau_n \quad tel\ que\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2})) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2}))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1})) = 0$$

Un autre choix possible de fonctions à valeur réelle indépendantes est donné par :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) = i\,\frac{Cotanh(\pi\tau_n)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau_n}(Cosh(\eta))\right)$$

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) = \frac{Cosh(\pi\tau_n)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta)) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau_n}(Cosh(\eta))\right)$$

Voici le graphe de l'équation transcendantale en tant que fonction du paramètre τ, les solutions étant l'ensemble des points d'intersection avec l'axe des abscisses :

$l_{\eta 1} = 1 \quad l_{\eta 2} = 2$

$$F(\tau, l_{\eta 1}, l_{\eta 2}) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(l_{\eta 2}))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1})) - P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 1}))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 2}))$$

Pour l'exemple, avec les valeurs $l_{\eta 1} = 1 \quad l_{\eta 2} = 2$ *voici le jeu de valeurs propres* τ_n *:*

τ_n =3.1319869898174106382, 6.2779019008125322845, 9.4211834216040919190, 12.563654676027245805, 15.705782929423131877, 18.847735498245959850,21.989586404634429313, 25.131373298661280558, 28.273117314492634571,31.414831218507219320, 34.556523172690331259,

Et avec les valeurs $l_{\eta 1}$*=4* $l_{\eta 2}$*=6 voici le jeu de valeurs propres τn : 1.57078, 3.14158, 4.71238, 6.28318, 7.85416, 9.42466, 10.9407*

<u>Discussion sur le cas de l'intervalle η€[</u>$l_{\eta 0}$*<u>,+∞], z=Cosh(η)->z€[z0=Cosh(</u>*$l_{\eta 0}$*<u>),+∞] (voir système sphéroïdal) :</u>*

Cette fois-ci, les deux fonctions de coniques de Mehler de première espèce et deuxième espèce s'annulent en z=+∞. Dans ces conditions toutes les valeurs de τ sont licites pour construire une solution. Tout se passe donc comme si les valeurs propres possédaient un spectre continu. Il suffit de choisir la fonction suivante pour respecter la condition aux limites homogène en η=$l_{\eta 0}$ *et la condition à l'infini:*

$$\Phi_\tau(\eta) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0})) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0})) \Rightarrow \Phi_\tau(l_{\eta 0}) = 0$$

Dans ce cas il n'est pas possible de construire un système discret et complet de fonctions propres ayant les bonnes propriétés sur les deux bornes de l'intervalle. En s'inspirant de la forme des solutions préconisées par la séparation des variables, on développe une intégrale proche de la formulation de la transformation intégrale de Mehler-Fock.

Discussion sur le cas de l'intervalle η€[0,+∞] (voir système sphéroïdal) :

Même si ce cas n'est abordé dans ce chapitre, il n'est pas possible de construire un système discret et complet de fonctions propres ayant les bonnes propriétés sur les deux bornes de l'intervalle. On fait donc appel à la transformation intégrale de Mehler-Fock pour construire ces solutions.

Problème aux limites sur l'intervalle [0,$l_{\eta 0}$]

Revenons aux cas d'un intervalle fini du problème aux limites. La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0\le\eta\le l_{\eta 0},\theta_1\le\theta<\theta_2\} \quad \underset{\substack{\theta\to 0\\ \eta\to 0}}{Lim} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

peut se développer comme suit, en intégrant au calcul les normes des fonctions propres radiales déjà été calculées dans le cas du système sphéroïdal, sur des problèmes aux limites de Dirichlet dans des sections d'hyperboloïde à deux nappes :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n\ne 0,+\infty}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\left(A_n\ Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta))+B_n\ Sinh(\tau_n(\theta-\theta_1))\right)$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}]\\ \theta=\theta_1}}=f_1(\eta)\Rightarrow\sum_{n\ne 0,+\infty}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))\left(A_n\ Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta_1))\right)=\frac{f_1(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{1}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta_1))}\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ \frac{Sinh(\eta)f_1(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\substack{\eta\in[l_{\eta 1},l_{\eta 2}]\\ \theta=\theta_2}}=f_2(\eta)\Rightarrow B_n=\frac{1}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta_1))}\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ \frac{Sinh(\eta)f_2(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{(1-2i\tau_n)}{4\tau_n}P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=4\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n\ne 0,+\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau_n P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{(1-2i\tau_n)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta_1))}\times\\ \times\left(A_{1n}\ Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta))+A_{2n}\ Sinh(\tau_n(\theta-\theta_1))\right)\end{array}\right\}$$

$$A_{1n}=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ \frac{Sinh(\eta)f_1(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}} \quad A_{2n}=\int_0^{l_{\eta 0}}d\eta\ \frac{Sinh(\eta)f_2(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}$$

Prenons le cas où les deux fonctions limites sont constantes, la solution du problème se développe alors comme suit :

$$T(\eta,\theta)=4\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n\ne 0,+\infty}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\tau_n P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{(1-2i\tau_n)P_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))\frac{\partial}{d\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta 0}))Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta_1))}\times\\ \times\left(A_{1n}\ Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta))+A_{2n}\ Sinh(\tau_n(\theta-\theta_1))\right)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}Si\quad f_1(\eta)=T_1\\ Si\quad f_2(\eta)=T_2\end{array}\right\}\Rightarrow A_{1n}=T_1\int_1^{Cosh(l_{\eta 0})}dz\ \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\sqrt{z-Cos(\theta_1)}} \quad et \quad A_{2n}=T_2\int_1^{Cosh(l_{\eta 0})}dz\ \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\sqrt{z-Cos(\theta_2)}}$$

.

Problème aux limites sur l'intervalle [$l_{\eta1}$,$l_{\eta2}$]

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{l_{\eta1}\le\eta\le l_{\eta2},\theta_1\le\theta<\theta_2\}$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta1}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta2}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

est alors la suivante :

$$\Phi_{\tau_n}(\eta)=\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta1}))}-\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(l_{\eta1}))} \quad \left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\int_{l_{\eta1}}^{l_{\eta2}}d\eta\ Sinh(\eta)(\Phi_{\tau_n}(\eta))^2$$

$$A_{1n}=\int_{l_{\eta1}}^{l_{\eta2}}d\eta\ \frac{Sinh(\eta)f_1(\eta)\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}} \quad A_{2n}=\int_{l_{\eta1}}^{l_{\eta2}}d\eta\ \frac{Sinh(\eta)f_2(\eta)\Phi_{\tau_n}(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\sum_{n\ne0,+\infty}\frac{(A_{1n}\ Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta))+A_{2n}\ Sinh(\tau_n(\theta-\theta_1)))}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 Sinh(\tau_n(\theta_2-\theta_1))}\Phi_{\tau_n}(\eta)$$

.

La norme des fonctions a déjà été calculée dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, il vient :

$$z_1=Cosh(l_{\eta1}) \qquad z_2=Cosh(l_{\eta2})$$

$$\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)=Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}=\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) \quad Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)=\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right)$$

$$\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)=Q^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}=\mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right) \quad Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)=\mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2=\frac{1}{2\tau_n}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta2})}{d\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z_2\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right]- \\ -\dfrac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta1})}{d\tau}\left[\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}+\tau_n\left\{z_1\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\dfrac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}+\dfrac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right]\end{array}\right]$$

avec
$$\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta2})}{d\tau}=\frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\dfrac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta1})}{d\tau}=\frac{\dfrac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}-\frac{\dfrac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

.

Ce qui donne formellement la solution du problème aux limites pour une fonction limite constante, comme suit :

$$z_1 = Cosh(l_{\eta 1}) \qquad z_2 = Cosh(l_{\eta 2}) \quad \Phi_{\tau_n}(\eta) = \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$\tau_n \quad tel\ que \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2) = \widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)$$

$$\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = Q^{réel}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n} = \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right) \quad Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z) = \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)\right)$$

$$\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) = Q^{réel}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n} = \mathrm{Re}\left(Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right) \quad Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z) = \mathrm{Im}\left(Q_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z)\right)$$

$$\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 = \frac{1}{2\tau_n}\left[\begin{array}{l} \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\} + \tau_n\left\{z_2\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_2)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right] - \\ -\frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\widetilde{P}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\} + \tau_n\left\{z_1\frac{Q^{imag}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{Q^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} + \frac{P^{imag}_{-\frac{3}{2}+i\tau_n}(z_1)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right\}\right] \end{array}\right]$$

$$avec \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 2})}{d\tau} = \frac{\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\frac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_2)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} \qquad \frac{\partial\Phi_{\tau_n}(l_{\eta 1})}{d\tau} = \frac{\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\frac{\partial\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}{d\tau}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}$$

$$f_1(\eta) = T_1 \quad f_2(\eta) = T_2 \Rightarrow A_{1n} = T_1\left(\frac{B_{1n}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{C_{1n}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right) \quad A_{2n} = T_2\left(\frac{B_{2n}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{C_{2n}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)$$

$$B_{1n} = \int_{z_1}^{z_2} dz\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\sqrt{z - Cos(\theta_1)}} \quad C_{1n} = \int_{z_1}^{z_2} dz\,\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\sqrt{z - Cos(\theta_1)}} \quad B_{2n} = \int_{z_1}^{z_2} dz\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\sqrt{z - Cos(\theta_2)}} \quad C_{2n} = \int_{z_1}^{z_2} dz\,\frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z)}{\sqrt{z - Cos(\theta_2)}}$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\sum_{n\neq 0,+\infty}\left\{\begin{array}{l} \frac{\left(\begin{array}{l} T_1\left(\frac{B_{1n}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{C_{1n}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)Sinh(\tau_n(\theta_2 - \theta)) + \\ +T_2\left(\frac{B_{2n}}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{C_{2n}}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right)Sinh(\tau_n(\theta - \theta_1)) \end{array}\right)}{\left\|\Phi_{\tau_n}(\eta)\right\|^2 Sinh(\tau_n(\theta_2 - \theta_1))} \times \\ \times\left(\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)} - \frac{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(Cosh(\eta))}{\widetilde{Q}_{-\frac{1}{2}+i\tau_n}(z_1)}\right) \end{array}\right\}$$

Problème aux limites sur l'intervalle [$l_{\eta 0}$,+∞]

Comme on l'a vu dans la discussion précédente, la solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0<l_{\eta 0}\leq\eta<+\infty,\theta_1\leq\theta<\theta_2\} \quad \underset{\substack{\theta\to 0\\ \eta\to 0}}{Lim} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\eta=l_{\eta 0}}=0 \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_2}=f_2(\eta)$$

est construite à partir d'une représentation intégrale de type de Mehler-Fock (voir plus loin).

Problème aux limites sur l'intervalle η€[0,+∞], z=Cosh(η)->z€[z0=1,+∞]

La solution d'un problème aux limites de Dirichlet de la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta)=0 \quad (\eta,\theta)\in\{0\leq\eta<+\infty \quad , \quad \theta_1\leq\theta<\theta_2\} \quad \underset{\substack{\theta\to 0\\ ou\\ \eta\to\infty\\ ou\\ \eta\to 0}}{Lim} T(\eta,\theta) \quad finie$$

$$T(\eta,\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=f(\eta)$$

est construite à partir d'une représentation intégrale de type de Mehler-Fock (voir plus loin).

Solutions des problèmes aux limites sur des domaines union, intersection et différence de sphères, lentilles sphériques

Le système de coordonnées toroïdales a la particularité de pouvoir modéliser des opérations géométriques particulières sur les sphères notamment les unions, intersections et différences de sphères, en utilisant les iso-surfaces ϑ=Cste. Dans la suite de l'exposé on utilise les coordonnées ϑ cette fois-ci dans l'intervalle [0,2π] plutôt que dans l'intervalle [-π,π], car la manipulation d'angle négatif introduit dans les raisonnements des intervalles non contigües moins commodes à manipuler. On se conforme également en cela à la présentation des solutions des problèmes aux limites telles que celles de l'ouvrage de N.Lebedev : « Special Functions and their applications »

Comme indiquer en tête de chapitre sur les coordonnées toroïdales, on remarque que pour les ϑ croissants positifs les iso-surfaces sont successivement englobées par la précédente. En partant pour la valeur ϑ=0 d'une sphère centrée à +∞ de rayon infini (à l'exclusion du disque de rayon a centré à l'origine dans le plan (x,y)) jusqu'à devenir ce même disque de rayon a pour la valeur ϑ=π. Pour les ϑ > π les iso-surfaces cette fois englobent successivement les précédentes jusqu'à devenir une sphère de centre tendant vers -∞ et de rayon infini, à l'exclusion du disque de rayon centré à l'origine dans le plan (x,y) pour la valeur ϑ=2π .

Il apparait donc pour une iso-surface $\vartheta=\vartheta_1$, ϑ_1€[0,π], que la zone convexe qualifiée d'intérieure est ϑ€[ϑ_1 ,π] et par opposition la zone concave, dîtes extérieure est ϑ€[π,2π+ϑ_1]. Pour une iso-surface $\vartheta=\vartheta_1$, ϑ_1€[0,π] la zone convexe qualifiée d'intérieure est ϑ€[π,ϑ_1] et par opposition la zone concave, dîtes extérieure est ϑ€[ϑ_1,2π+ϑ_1]

<u>Modélisation d'intersections de sphères (lentilles sphérique)</u>

Les domaines définis par les intervalles de coordonnées toroïdales suivant, construisent des intersection de sphères, que l'on peut plus communément dénommées lentilles sphériques

$$\delta D=\left\{(\eta,\vartheta,\varphi)\in([0,+\infty]\times\vartheta_1\times[0,2\pi])\cup([0,+\infty]\times\vartheta_2\times[0,2\pi])\quad tq\quad\left(\vartheta_1\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]et\ \vartheta_2\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right)\right\}$$

Le domaine intérieur est défini comme suit :

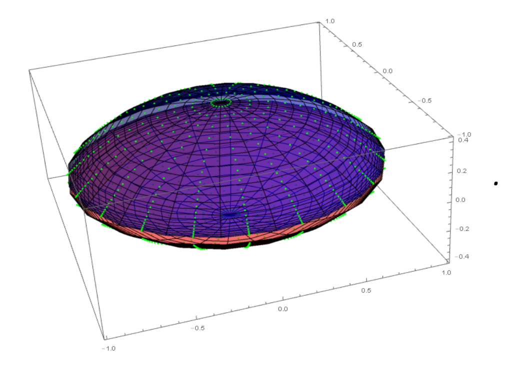
$$D_{\text{int}}=\left\{(\eta,\vartheta,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\vartheta_1,\vartheta_2]\times[0,2\pi]\quad tq\quad\left(\vartheta_1\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]et\ \vartheta_2\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right)\right\}$$

Le domaine extérieur est défini comme suit :

$$D_{ext}=\left\{(\eta,\vartheta,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\vartheta_2,2\pi+\vartheta_1]\times[0,2\pi]\quad tq\quad\left(\vartheta_1\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]et\ \vartheta_2\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right)\right\}$$

Exemple de lentille sphérique avec :

$$\vartheta_1=\frac{3\pi}{4}\quad\vartheta_2=\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\vartheta_1=\pi-\alpha_1\\ \alpha_1=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\quad\begin{cases}\vartheta_2=\pi+\alpha_2\\ \alpha_2=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$



Modélisation d'unions de sphères

Les domaines définis par les intervalles de coordonnées toroïdales suivant construisent des unions de sphères :

$$\delta D=\left\{\begin{array}{l}(\eta,\vartheta,\varphi)\in[0,+\infty]\times\vartheta_1\times[0,2\pi]\cup[0,+\infty]\times\vartheta_2\times[0,2\pi]\quad tq\quad\left(\vartheta_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]\right)\\ ou\left(\vartheta_1\in[0,\pi]\,et\ \vartheta_2\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right)\end{array}\right\}$$

Le domaine intérieur est définit comme suit :

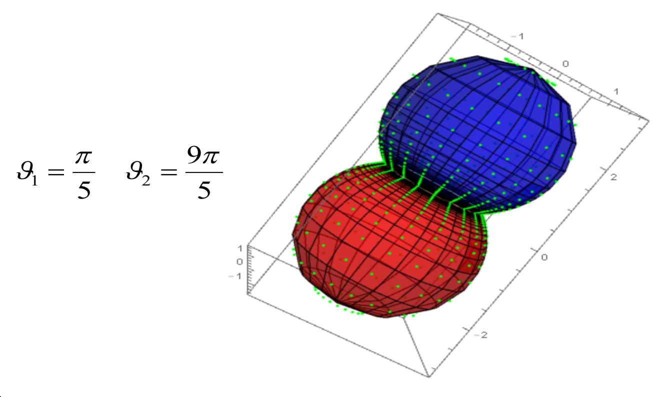
$$D_{\text{int}}=\left\{\begin{array}{l}(\eta,\vartheta,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\vartheta_1,\vartheta_2]\times[0,2\pi]\quad tq\quad\left(\vartheta_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]\right)\\ ou\left(\vartheta_1\in[0,\pi]\,et\ \vartheta_2\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right)\end{array}\right\}$$

Et le domaine extérieur est définit ainsi :

$$D_{ext}=\left\{\begin{array}{l}(\eta,\vartheta,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\vartheta_2,2\pi+\vartheta_1]\times[0,2\pi]\quad tq\quad\left(\vartheta_1\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]\right)\\ ou\left(\vartheta_1\in[0,\pi]\,et\ \vartheta_2\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\right)\end{array}\right\}$$

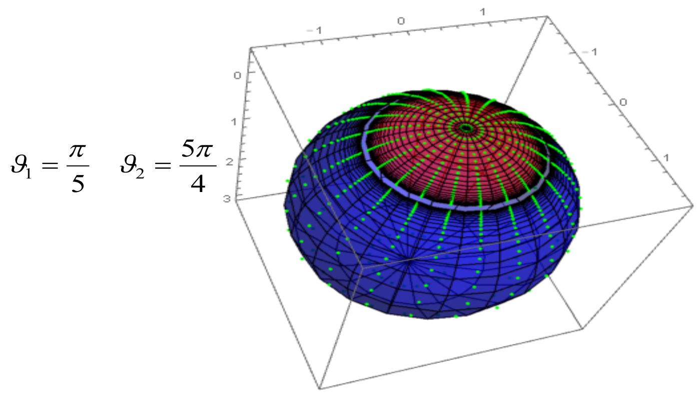
Exemple d'union de sphères avec

$$\vartheta_1=\frac{\pi}{5}\quad\vartheta_2=\frac{9\pi}{5}$$



Exemple d'union de sphères avec :

$$\vartheta_1=\frac{\pi}{5}\quad\vartheta_2=\frac{5\pi}{4}$$



Modélisation de différences de sphères

Les domaines définis par les intervalles de coordonnées toroïdales suivant construisent des différences de sphères :

$$\delta D = \begin{cases} (\eta,\vartheta,\varphi) \in ([0,+\infty]\times\vartheta_1\times[0,2\pi]) \cup ([0,+\infty]\times\vartheta_2\times[0,2\pi]) \quad tq \quad \vartheta_1<\vartheta_2 \quad et \quad (\vartheta_1\in[0,\pi]\, et\ \vartheta_2\in[0,\pi]) \\ ou\ (\vartheta_1\in[\pi,2\pi]\, et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]) \end{cases}$$

Dans les deux cas, le domaine intérieur est définit comme suit :

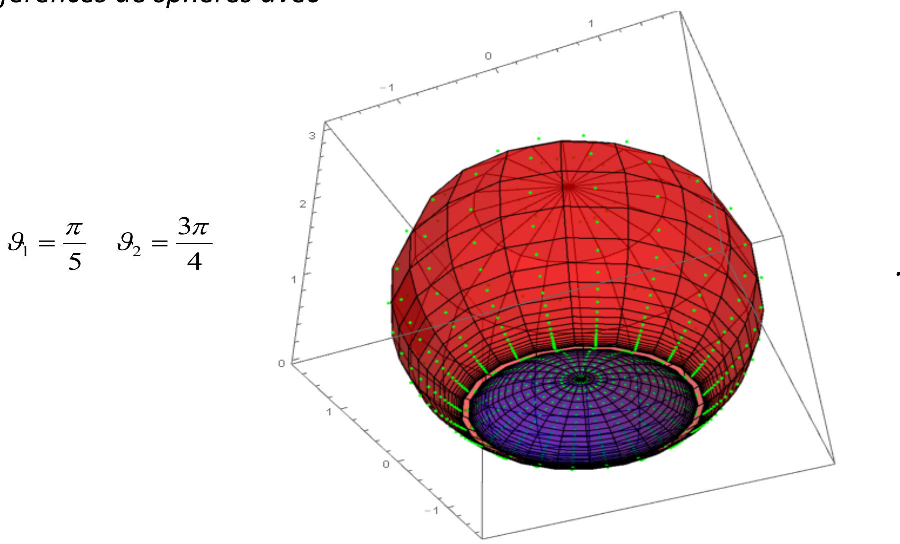
$$D_{\text{int}} = \begin{cases} (\eta,\vartheta,\varphi) \in [0,+\infty]\times[\vartheta_1,\vartheta_2]\times[0,2\pi] \quad tq \quad \vartheta_1<\vartheta_2 \quad et \quad (\vartheta_1\in[0,\pi]\, et\ \vartheta_2\in[0,\pi]) \\ ou\ (\vartheta_1\in[\pi,2\pi]\, et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]) \end{cases}$$

Et le domaine extérieure comme suit :

$$D_{ext} = \begin{cases} (\eta,\vartheta,\varphi) \in [0,+\infty]\times[\vartheta_2,2\pi+\vartheta_1]\times[0,2\pi] \quad tq \quad \vartheta_1<\vartheta_2 \quad et \quad (\vartheta_1\in[0,\pi]\, et\ \vartheta_2\in[0,\pi]) \\ ou\ (\vartheta_1\in[\pi,2\pi]\, et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]) \end{cases}$$

Exemple de différences de sphères avec

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{5} \quad \vartheta_2 = \frac{3\pi}{4}$$



.

Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine intérieur de la différence de deux sphères

L'exemple suivant résout le problème de Dirichlet dans l'espace intérieure d'une différence de sphères. Il est donné par à N.N Lebedev dans son ouvrage « Special Functions and their applications », page 227, section 8.12.

$$\Delta T(\eta,\vartheta,\varphi) = 0 \quad (\eta,\vartheta,\varphi) \in D_{\text{int}}$$

$$T(\eta,\vartheta,\varphi)\big|_{\vartheta=\vartheta_1} = f_1(\eta,\varphi) \quad T(\eta,\vartheta,\varphi)\big|_{\vartheta=\vartheta_2} = f_2(\eta,\varphi)$$

$$D_{\text{int}} = \begin{cases} (\eta,\vartheta,\varphi) \in [0,+\infty]\times[\vartheta_1,\vartheta_2]\times[0,2\pi] \quad tq \quad \vartheta_1<\vartheta_2 \quad et \quad (\vartheta_1\in[0,\pi]\, et\ \vartheta_2\in[0,\pi]) \\ ou\ (\vartheta_1\in[\pi,2\pi]\, et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi]) \end{cases}$$

Rappelons que les solutions d'un tel problème de Dirichlet inhomogène en ϑ, sont de la forme :

$$U(\eta,\theta,\varphi) = \begin{Bmatrix} \sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(A\, P^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) + B\, Q^{\pm m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right)(ACosh(\tau\theta)+B\ Sinh(\tau\theta))\times \\ \times(ACos(m\varphi)+B\ Sin(m\varphi)) \end{Bmatrix}.$$

Supposons que le problème ne dépendent plus de l'angle azimutale ϕ, alors la solution se construit à partir d'une superposition des fonctions suivantes :

$$U(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(A\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))+B\,Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\right)(ACosh(\tau\theta)+B\,Sinh(\tau\theta))$$

. La fonction de Mehler de deuxième espèce est divergente en η=0, soit en z=Cosh(η)=1. Cette valeur correspond à l'axe z en coordonnées cartésiennes. Il convient donc pour resptecter la finitude de la solution de poser B=0. La solution est donc une superposition de fonctions de la forme :

$$U(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\,(ACosh(\tau\theta)+B\,Sinh(\tau\theta))P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

.

Faisons maintenant intervenir le théorème de Mehler-Fock qui permet de construire les transformations intégrales du même nom :

Théorème de Mehler-Fock et transformation de Mehler-Fock

Toute fonction f(η) peut se représenter sous forme intégrale d'une fonction F(τ), par la transformée inverse de Mehler-Fock :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)F(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

et la fonction « transformée inverse » s'écrit comme représentation intégrale, transformée de Mehler-Fock, comme suit :

$$F(\tau)=\int_0^{+\infty}d\eta\,Sinh(\eta)\,f(\eta)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

Sous les conditions suivantes des fonctions f(η) :

- la fonction f(η) doit être continue par morceau, et bornée dans chaque sous-intervalle [lη1,lη2] de l'intervalle d'intégration [0,+∞]
- les intégrales suivantes doivent être définies :

$$\int_0^{a}d\eta\,|f(\eta)|(\eta-1)^{\frac{3}{4}}\quad et\quad\int_a^{+\infty}d\eta\,|f(\eta)|(\eta)^{-\frac{1}{2}}Log(\eta)$$

.

quelque soit la valeur a > 1 pris dans l'intervalle d'intégration.

A ces condition on peut encore écrire :

$$f(\eta)=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\int_0^{+\infty}dx\,Sinh(x)\,f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(x))$$

Petite nuance, au point de discontinuité, on écrira :

$$\frac{f(\eta+0)+f(\eta-0)}{2}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\int_0^{+\infty}dx\,Sinh(x)\,f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(x))$$

.

Illustrons cette construction pour le problème aux limites défini auparavant. Dans ce cas la superposition peut être vu comme une intégration continue sur le paramètre τ :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\ \left(A(\tau)Cosh(\tau\theta)+B(\tau)Sinh(\tau\theta)\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

ou de manière équivalente avec les valeurs limites de θ1 et θ2 :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(\theta-\theta_1))+B(\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta))\right)}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

Les conditions limites s'expriment alors sous la forme :

$$f_1(\eta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}\int_0^{+\infty}d\tau\,B(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\Leftrightarrow\frac{f_1(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}=\int_0^{+\infty}d\tau\,B(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$f_2(\eta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}\int_0^{+\infty}d\tau\,A(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\Leftrightarrow\frac{f_2(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}=\int_0^{+\infty}d\tau\,A(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

Or selon les termes du théorème de Mehler-Fock les deux intégrales précédentes représentent les des transformations et transformations inverses de Mehler-Fock comme suit :

$$Posons\quad\begin{cases}\tau\,Tanh(\pi\tau)F_1(\tau)=B(\tau)\\ \tau\,Tanh(\pi\tau)F_2(\tau)=A(\tau)\end{cases}\quad et\quad\begin{cases}f_B(\eta)=\dfrac{f_1(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}\\ f_A(\eta)=\dfrac{f_2(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{f_1(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,B(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ \dfrac{f_2(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,A(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f_B(\eta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)F_1(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ f_A(\eta)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,\tau\,Tanh(\pi\tau)F_2(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}F_1(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,Sinh(\eta)\frac{f_1(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ F_2(\tau)=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,Sinh(\eta)\frac{f_2(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_1(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_2(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{cases}$$

La solution formelle s'écrit donc :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(\theta-\theta_1))+B(\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta))\right)}{Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec\quad\begin{cases}B(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_1(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_2(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{cases}$$

Les fonctions A(τ) et B(τ) peuvent se calculer explicitement lorsque les fonctions limites sont constantes. En effet la formule suivante sur les fonctions coniques a été donnée auparavant dans la section sur les problèmes en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{\sqrt{2Cosh(\alpha)-2Cos(\beta)}}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\beta))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha))$$

En appliquant le théorème de Mehler-Fock, on peut déduire une autre formule impliquant les fonctions de Mehler :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,C(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ \dfrac{1}{\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\theta_1)}}=\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_1))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}\Rightarrow C(\tau)=\sqrt{2}\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_1))}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$Comme\quad C(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow \tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\sqrt{2}\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_1))}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\sqrt{2}\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_1))}{\tau\,Sinh(\pi\tau)}.$$

Ce qui donne les expressions suivantes pour A(τ) et B(τ) lorsque les fonctions limites sont constantes :

$$f_1(\eta)=T_1\quad f_2(\eta)=T_2$$

$$\begin{cases}B(\tau)=T_1\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=T_1\sqrt{2}\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_1))}{Cosh(\pi\tau)}\\ A(\tau)=T_2\,\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=T_2\sqrt{2}\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_2))}{Cosh(\pi\tau)}\end{cases}.$$

Soit une solution pour le problème intérieur de la différence de sphères :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\begin{Bmatrix}\dfrac{(T_2\,Cosh(\tau(\pi-\theta_2))Sinh(\tau(\theta-\theta_1))+T_1\,Cosh(\tau(\pi-\theta_1))Sinh(\tau(\theta_2-\theta)))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))}\times\\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{Bmatrix}$$

On revérifie que la solution respecte bien les conditions aux limites :

$$T(\eta,\theta_1)=T_1\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\theta_1)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_1))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=T_1$$

$$T(\eta,\theta_2)=T_2\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\theta_2)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_2))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=T_2.$$

Lorsque les deux valeurs constantes sont identiques, on doit normalement retrouver une valeur constante. En effet en développant le produit des sinus et cosinus hyperbolique:

$$T_1 = T_2 = T_0 \quad Cosh(a)Sinh(b) = \frac{Sinh(a+b) - Sinh(a-b)}{2}$$

$$T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Cosh(\tau(\pi-\theta_2))Sinh(\tau(\theta-\theta_1)) + Cosh(\tau(\pi-\theta_1))Sinh(\tau(\theta_2-\theta))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left[\begin{array}{l} Sinh(\tau(\pi-\theta_2) + \tau(\theta-\theta_1)) - Sinh(\tau(\pi-\theta_2) - \tau(\theta-\theta_1)) \\ + Sinh(\tau(\pi-\theta_1) + \tau(\theta_2-\theta)) - Sinh(\tau(\pi-\theta_1) - \tau(\theta_2-\theta)) \end{array} \right]}{2Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{Sinh(\tau(\pi-\theta+\theta_2-\theta_1)) - Sinh(\tau(\pi-\theta-\theta_2+\theta_1))}{2Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta_1))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = T_0$$

Pour <u>un bol sphérique à fond plat :</u>

$$Ici \quad \theta_1 = \theta_0 \quad \theta_2 = \pi$$

$$Si \quad T_1 \neq T_2 \Rightarrow$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(T_2\, Sinh(\tau(\theta-\theta_0)) + T_1\, Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\pi-\theta)))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\theta_0))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$Si \quad T_2 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_1\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\theta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_1 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_2\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh(\tau(\theta-\theta_0))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\theta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_1 = T_2 = T_0$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(Sinh(\tau(\theta-\theta_0) - \pi\tau + \pi\tau) + Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\pi-\theta)))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\theta_0))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(Sinh(\tau(\theta-\pi) + \tau(\pi-\theta_0)) + Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\pi-\theta)))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\theta_0))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{Cosh(\tau(\theta-\pi))Sinh(\tau(\pi-\theta_0))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\theta_0))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(\theta-\pi))}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = T_0$$

.

Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine intérieur d'un hémisphère plein

Pour *un bol hémisphérique à fond plat, l'angle d'ouverture est de π/2 avec des conditions aux limites constantes.*

$$Ici \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi \quad Si \quad T_1 = T_2 = T_0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_0$$

$$Si \quad T_1 \neq T_2 \Rightarrow$$

$$T(\eta,\theta) = 4\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)\left(T_2\, Sinh\left(\tau\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) + T_1\, Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\pi-\theta))\right)}{Sinh(2\pi\tau)} \times \atop \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$= \frac{T_2 + T_1}{2} + 2(T_2 - T_1)\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} Sinh\left(\tau\left(\theta - \pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \\ - Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\pi-\theta)) \end{pmatrix}}{Sinh(2\pi\tau)} \times \atop \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$= \frac{T_2 + T_1}{2} + 2(T_2 - T_1)\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{\left[Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} 2Sinh(\tau(\theta-\pi))Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right) + \\ Cos(\tau(\theta-\pi))Sinh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\right]}{Sinh(2\pi\tau)} \times \atop \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$Si \quad T_2 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = 4T_1\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh^2\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(2\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_1 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = 4T_2\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh\left(\tau\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

En coordonnées toroïdales l'hémisphère (iso-surface θ=π/2) a pour rayon le coefficient d'échelle du système de coordonnées toroïdales :

$$x = a\,Tanh(\eta)Cos(\varphi) \quad y = a\,Tanh(\eta)Sin(\varphi) \quad z = \frac{a}{Cosh(\eta)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\left(Tanh^2(\eta) + \frac{1}{Cosh^2(\eta)}\right) = a^2 \Rightarrow rayon \quad a$$

.

Le fond plat est le disque de rayon a (iso-surface θ=π/2) :

$$x = a\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)+1}Cos(\varphi) \quad y = a\frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)+1}Sin(\varphi) \quad z = 0$$

$$x^2+y^2 = a^2\frac{Sinh^2(\eta)}{\left(Cosh(\eta)+1\right)^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\eta\to 0}\rho = 0 \\ \lim\limits_{\eta\to+\infty}\rho = a \end{cases}$$

Regardons le profil de la solution sur l'axe z :

$$Si \quad T_1 \neq T_2 \Rightarrow axe\ z\ intérieur\ de\ l'hémisphère \quad \eta = 0 \quad et \quad \theta\in[0,\pi] \quad P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(1)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = 4\sqrt{2}\sqrt{1-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)\left(T_2\,Sinh\left(\tau\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)+T_1\,Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\pi-\theta))\right)}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$T(\eta,\theta) = 8Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\left(T_1\,Cosh^2\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\pi-\theta))+T_2\,Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Sinh\left(\tau\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)}{Sinh(2\pi\tau)}$$

.

Il reste à calculer les intégrales suivantes :

$$Comme\ Sinh(a)Cosh(b) = \frac{1}{2}\left(Sinh(a+b)+Sinh(a-b)\right) \quad 2Cosh^2\left(\frac{a}{2}\right) = 1+Cosh(a)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh\left(\tau\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau\theta)}{Sinh(2\pi\tau)}+\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\theta-\pi))}{Sinh(2\pi\tau)}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))Cosh^2\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))Cosh(\tau\pi)}{Sinh(2\pi\tau)}+\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(2\pi\tau)}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))Cosh^2\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(2\pi\tau)}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(2\pi-\theta))}{Sinh(2\pi\tau)}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau\theta)}{Sinh(2\pi\tau)}\right)$$

De plus

$$\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(a\tau)}{Sinh(b\tau)} = \frac{\pi}{2b}Tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \quad et \quad \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(a\tau)}{Cosh(b\tau)} = \frac{\pi}{2b}\frac{1}{Cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau\theta)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{4}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) \quad \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(2\pi-\theta))}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{4}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right) \\ \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{4}Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right) \end{cases}$$

$$Terme\ T_1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))Cosh^2\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right)-\frac{1}{2}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)+Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)\right)$$

$$Terme\ T_2 \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh\left(\tau\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{8}\left(Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)-Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)\right)$$

Ce qui donne la solution du profil sur l'axe z :

$$T(\theta) = Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(T_1\left(\frac{1}{2}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right) - \frac{1}{2}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) + Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)\right) + T_2\left(Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) - Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + \left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right) - \frac{1}{2}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) + Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right) - Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) + Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{T_1+T_2}{2} + \left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right) + \frac{1}{2}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) - 2Tan\left(\frac{\theta}{4}\right) + 2Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)\right)$$

$$Or \quad Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right) + \frac{1}{2}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right) = 1$$

$$\Rightarrow T(\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + \left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)\left(1 + 2Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + \left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)\left(2Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1 - 4Sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\theta) = \frac{T_1+T_2}{2} + \left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)\left(2Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)$$

$$Si \quad T_1 \neq 0 \quad T_2 = 0 \Rightarrow \frac{T(\theta)}{T_1} = Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Posons le facteur d'échelle à 1 (*hémisphère de rayon unité*) $\quad T_1 = 1 \quad a = 1 \Rightarrow z = \dfrac{Sin(\theta)}{1-Cos(\theta)} = Cotan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

$$Sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right) = \frac{Cos\left(\frac{\theta}{4}\right) - Sin\left(\frac{\theta}{4}\right)}{Cos\left(\frac{\theta}{4}\right) + Sin\left(\frac{\theta}{4}\right)} = \frac{1 + Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}{\frac{1}{Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1}$$

$$\Rightarrow Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right) = \frac{\sqrt{1+z^2} + z - 1}{\sqrt{1+z^2} + z + 1} \Rightarrow T(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left(z + \frac{\sqrt{1+z^2} + z - 1}{\sqrt{1+z^2} + z + 1}\right)$$

En comparaison avec une autre expression (voir ci-dessus), on parvient au même résultat par un développement similaire :

$$T(\theta)=\frac{T_2+T_1}{2}+2\sqrt{2}(T_2-T_1)\sqrt{1-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{\left[Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}2Sinh(\tau(\theta-\pi))Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)+\\Cos(\tau(\theta-\pi))Sinh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\right]}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+4(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau(\theta-\pi))2Cosh^2\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)+Cos(\tau(\theta-\pi))Sinh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right)}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+2(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{2Sinh(\tau(\theta-\pi))(1+Cosh(\tau\pi))+Cos(\tau(\theta-\pi))Sinh(\tau\pi)}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+2(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau(\theta-\pi))+2(1+Cosh(\tau\pi))Sinh(\tau(\theta-\pi))}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+2(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau(\theta-\pi))+2Sinh(\tau(\theta-\pi))+2Cosh(\tau\pi)Sinh(\tau(\theta-\pi))}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+2(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Sinh(\tau\theta)+2Sinh(\tau(\theta-\pi))+Cosh(\tau\pi)Sinh(\tau(\theta-\pi))}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{2Sinh(\tau\theta)+4Sinh(\tau(\theta-\pi))+2Sinh(\tau(\theta-\pi))Cosh(\tau\pi)}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$Comme\ Sinh(a)Cosh(b)=\frac{1}{2}(Sinh(a+b)+Sinh(a-b))$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{(3Sinh(\tau\theta)+4Sinh(\tau(\theta-\pi))+Sinh(\tau(\theta-2\pi)))}{Sinh(2\pi\tau)}\right\}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{\frac{3}{4}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)+Tan\left(\frac{\theta-\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+(T_2-T_1)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)+Tan\left(\frac{\theta-\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}Cotan\left(\frac{\theta}{4}\right)+\frac{1}{4}Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{T_2+T_1}{2}+(T_2-T_1)\left\{Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+Tan\left(\frac{\theta-\pi}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{T_1+T_2}{2}+(T_1-T_2)\left\{Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}-Tan\left(\frac{\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$T(\theta)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{(T_1-T_2)}{2}\left\{2Tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+1-4Sin^2\left(\frac{\theta}{4}\right)\right\}$$

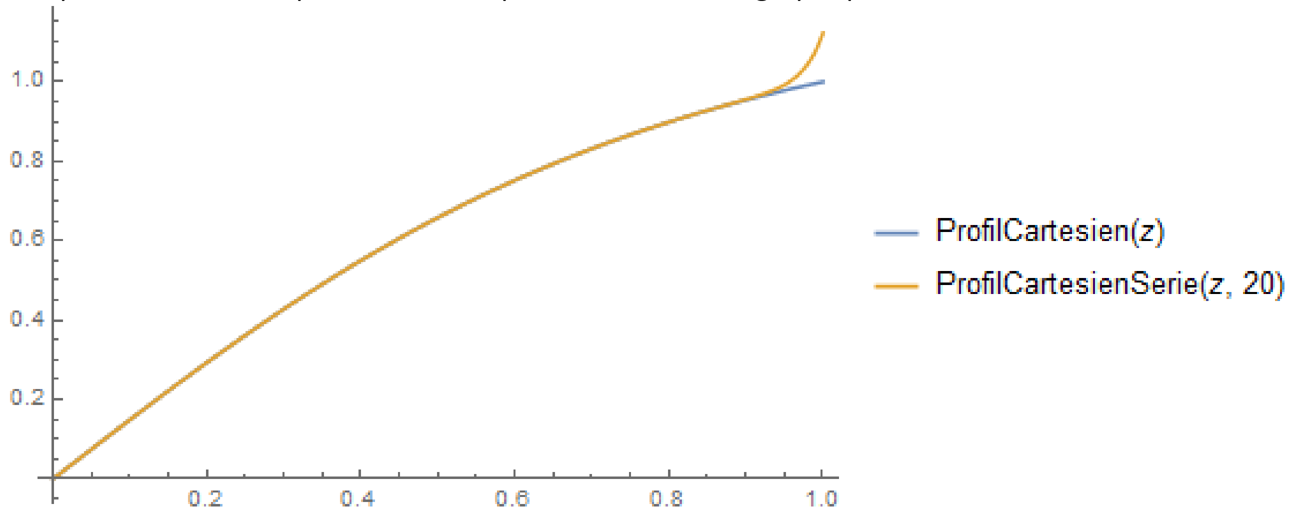
.

Ce résultat est à mettre en parallèle avec celui obtenu sous forme de développement en série en utilisant les coordonnées sphériques, soit :

$$T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}P_{2n+1}(Cos(\theta))$$

$$Axe\ z\ en\ coordonnées\ sphériques, z=r,\theta=0\Rightarrow T(z)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}z^{2n+1}.$$

Les profils sont identiques comme on peut le voir dans le graphique suivant :



.

Du reste on vérifie sur les premiers termes de la série que le développement limité de la fonction :

$$T(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left(z+\frac{\sqrt{1+z^2}+z-1}{\sqrt{1+z^2}+z+1}\right).$$

coïncide pour les quinze premiers termes au moins. Il est donc fort probable que :

$$T(z)=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left(z+\frac{\sqrt{1+z^2}+z-1}{\sqrt{1+z^2}+z+1}\right)=\sum_{n=0,+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(4n+3)}{2(n+1)}z^{2n+1}.$$

Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine extérieur de la différence de deux sphères

L'exemple suivant résout le problème de Dirichlet dans l'espace extérieur d'une différence de sphères. La solution est également donnée dans l'ouvrage de N.N Lebedev « Special Functions and their applications », page 229, section 8.12.

$$\Delta T(\eta,\vartheta,\varphi)=0 \quad (\eta,\vartheta,\varphi)\in D_{ext} \quad T(\eta,\vartheta,\varphi)\big|_{\vartheta=\vartheta_1}=f_1(\eta,\varphi) \quad T(\eta,\vartheta,\varphi)\big|_{\vartheta=\vartheta_2}=f_2(\eta,\varphi)$$

$$D_{ext}=\left\{\begin{array}{l}(\eta,\vartheta,\varphi)\in[0,+\infty]\times[\vartheta_2,2\pi+\vartheta_1]\times[0,2\pi] \quad tq \quad \vartheta_1<\vartheta_2 \quad et \quad (\vartheta_1\in[0,\pi]\, et\ \vartheta_2\in[0,\pi])\\ ou\ (\vartheta_1\in[\pi,2\pi]\, et\ \vartheta_2\in[\pi,2\pi])\end{array}\right\}$$

$$Sans\ dépendance\ à\ \varphi \Rightarrow T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=\vartheta_1}=f_1(\eta) \quad T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=\vartheta_2}=f_2(\eta)$$

L'astuce consiste à considérer le domaine extérieur du problème comme le domaine intérieur sur une section angulaire : $[\vartheta_2,\vartheta_1+2\pi]$*. Dans ces conditions en appliquant le résultat du problème intérieur précédent, la solution s'écrit :*

$$T_s(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(\theta-\vartheta_1-2\pi))+B(\tau)Sinh(\tau(\theta_2-\theta))\right)}{Sinh(\tau(\theta_2-\vartheta_1-2\pi))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta))+B(\tau)Sinh(\tau(\theta-\theta_2))\right)}{Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec \quad \theta\in[\theta_2,2\pi+\vartheta_1] \quad et \quad \left\{\begin{array}{l}B(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_1(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_2(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right.$$

Si les deux fonctions limites sont constantes de valeurs respectives T_1 *et* T_2*, il vient :*

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\begin{array}{l}T_2Cosh(\tau(\pi-\theta_2))Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta))+\\+T_1Cosh(\tau(\pi-\theta_1))Sinh(\tau(\theta-\theta_2))\end{array}\right)}{Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))Cosh(\pi\tau)}\times\\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

Et si les deux fonctions limites sont constantes et identiques :

$$T_1 = T_2 = T_0 \quad Cosh(a)Sinh(b) = \frac{Sinh(a+b) - Sinh(a-b)}{2}$$

$$T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\begin{pmatrix} Cosh(\tau(\pi-\theta_2))Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta)) + \\ Cosh(\tau(\pi-\theta_1))Sinh(\tau(\theta-\theta_2)) \end{pmatrix}}{Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\begin{pmatrix} Sinh(\tau(\pi-\theta_2)+\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta)) - Sinh(\tau(\pi-\theta_2)-\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta)) + \\ Sinh(\tau(\pi-\theta_1)+\tau(\theta-\theta_2)) - Sinh(\tau(\pi-\theta_1)-\tau(\theta-\theta_2)) \end{pmatrix}}{2Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\begin{pmatrix} Sinh(\tau(3\pi-\theta+\vartheta_1-\theta_2)) - Sinh(\tau(\theta-\pi-\vartheta_1-\theta_2)) + \\ + Sinh(\tau(\pi+\theta-\theta_1-\theta_2)) - Sinh(\tau(\pi-\theta-\theta_1+\theta_2)) \end{pmatrix}}{2Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

Etudions maintenant le cas particulier où l'angle limite θ_2 est π, alors la forme géométrique est une sphère coupée posé à plat sur le disque de rayon a centrée à l'origine. Il vient pour la solution du problème extérieur pour <u>*un bol sphérique à fond plat :*</u>

$$Ici \quad \theta_1 = \theta_0 \quad \theta_2 = \pi$$

$$Si \quad T_1 \neq T_2 \Rightarrow$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(T_2 Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta)) + T_1 Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\theta-\pi)))}{Sinh(\tau(\pi+\vartheta_0))Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$Si \quad T_1 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_2\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta))}{Sinh(\tau(\pi+\vartheta_0))Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_2 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_1\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\theta-\pi))}{Sinh(\tau(\pi+\vartheta_0))Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_1 = T_2 = T_0 \Rightarrow$$

$$T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta)) + Cosh(\tau(\pi-\theta_0))Sinh(\tau(\theta-\pi)))}{Sinh(\tau(\pi+\vartheta_0))Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}.$$

<u>Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine extérieur d'un hémisphère plein</u>

Pour *<u>un bol hémisphérique à fond plat, l'angle d'ouverture est de π/2</u>, si les conditions aux limites sont constantes sur chacune des faces extérieures, il vient :*

$$Ici \quad \theta_1 = \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi$$

$$Si \quad T_1 \neq T_2 \Rightarrow T(\eta,\theta) = \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{\left(T_2 Sinh\left(\tau\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)\right) + T_1 Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right) Sinh(\tau(\theta - \pi)) \right)}{Sinh\left(\tau\frac{3\pi}{2}\right) Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$Si \quad T_1 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_2\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh\left(\tau\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)\right)}{Sinh\left(\tau\frac{3\pi}{2}\right) Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_2 = 0 \Rightarrow T(\eta,\theta) = T_1\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right) Sinh(\tau(\theta - \pi))}{Sinh\left(\tau\frac{3\pi}{2}\right) Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Si \quad T_1 = T_2 = T_0 \Rightarrow$$

$$T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{\left(Sinh\left(\tau\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)\right) + Cosh\left(\tau\frac{\pi}{2}\right) Sinh(\tau(\theta - \pi)) \right)}{Sinh\left(\tau\frac{3\pi}{2}\right) Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

.

Prenons deux constantes limites différentes, la solution s'exprime avec les deux intégrales :

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{2Cosh(\eta)-2Cos(\theta)}\left[\begin{array}{l} T_2\int_0^{+\infty}d\tau\,\dfrac{Sinh\left(\tau\left(\dfrac{5\pi}{2}-\theta\right)\right)}{Sinh\left(\tau\dfrac{3\pi}{2}\right)Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))+\\ +T_1\int_0^{+\infty}d\tau\,\dfrac{\left(Cosh\left(\tau\dfrac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\theta-\pi))\right)}{Sinh\left(\tau\dfrac{3\pi}{2}\right)Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right]$$

$$Axe\ z\rightarrow\eta=0\Rightarrow T(\theta)=2Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[T_2\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Sinh\left(\tau\left(\dfrac{5\pi}{2}-\theta\right)\right)}{Sinh\left(\tau\dfrac{3\pi}{2}\right)Cosh(\pi\tau)}+T_1\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(Cosh\left(\tau\dfrac{\pi}{2}\right)Sinh(\tau(\theta-\pi))\right)}{Sinh\left(\tau\dfrac{3\pi}{2}\right)Cosh(\pi\tau)}\right]$$

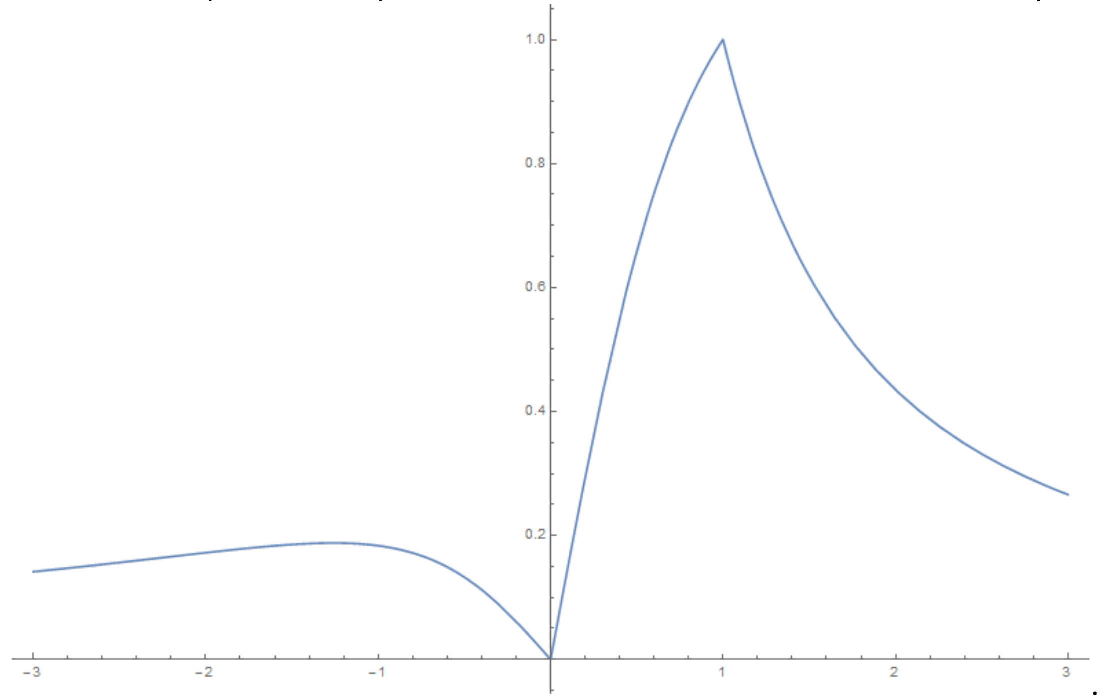
Le long de l'axe z, il faut prendre les valeurs liées à l'angle θ suivantes :

$$Domaine\ intérieur\rightarrow\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\rightarrow z=Cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)\quad\in[0,1]$$

$$Domaine\ extérieur\rightarrow\begin{cases}\theta\in[\pi,2\pi]\rightarrow z=2\pi+Cotan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\in[-\infty,0]\\ \theta\in\left[2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right]\rightarrow z=2\pi+Cotan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\in[1,+\infty]\end{cases}$$

/

Voici le graphe combinant les profils intérieur et extérieur de l'hémisphère plein le long de l'axe z. On note que les discontinuités visibles dans les dérivées ne sont pas réellement physique quoique la solution mathématique des deux problèmes intérieur et extérieur de Dirichlet soit a priori juste :



La solution physiquement vraisemblable n'est donc certainement pas dans la catégorie des problèmes de Dirichlet, devant faire intervenir également la continuité des dérivées premières à lal normale des frontières du domaine de l'hémisphère.

<u>Exemple : solution du problème de Dirichlet électrostatique sur le domaine extérieur de la différence de sphères : potentiel dû à une charge placée à l'origine des coordonnées</u>

Selon le procédé usuel, nous allons retrancher de la solution recherchée le potentiel dû à la charge placé à l'origine des coordonnées toroïdales (également origine des coordonnées cartésiennes) afin de transformer le problème homogène de Dirichlet sur les deux faces extérieures de la différence de sphères au potentiel nul en un problème de Dirichlet avec une valeur limite égale à l'opposée du potentiel crée par la charge sur chacune des faces. Cela donne

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+T_s(\eta,\theta)\quad\Rightarrow f(\eta)=-\left.\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\partial S}\qquad \partial S=\{\theta=\theta_1\}\cup\{\theta=\theta_2\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{c\sqrt{\frac{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^2}}}=\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)}}=\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}$$

$$=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}\Rightarrow f_1(\eta)=-\frac{T_0}{c}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta_1)}}\quad f_2(\eta)=-\frac{T_0}{c}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta_2)}}$$

$$T_s(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta))+B(\tau)Sinh(\tau(\theta-\theta_2))\right)}{Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec\quad \theta\in[\theta_2,2\pi+\vartheta_1]\quad et\quad\begin{cases}B(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_1(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_1)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\\ A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f_2(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_2)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x+Cos(\theta_2)}}\quad B(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x+Cos(\theta_1)}}.$$

On connait la valeur de cette dernière intégrale à partir d'un développement intégrale connu que l'on peut identifier avec les termes de la transformation intégrale de Mehler-Fock. Il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x+Cos(\theta)}}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\theta)}{Cosh(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\Leftrightarrow\frac{Cosh(\tau\theta)}{Cosh(\tau\pi)}=\tau\,Tanh(\tau\pi)\int_1^{+\infty}dx\,\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x+Cos(\theta)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}dx\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{2}\sqrt{x+Cos(\theta)}}=\frac{Cosh(\tau\theta)}{Cosh(\tau\pi)\tau\,Tanh(\tau\pi)}=\frac{Cosh(\tau\theta)}{\tau\,Sinh(\tau\pi)}.$$

La solution s'écrit alors :

$$A(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x+Cos(\theta_1)}}=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{Cosh(\tau\theta_2)}{\tau\,Sinh(\tau\pi)}\sqrt{2}=-\frac{T_0}{c}\frac{Cosh(\tau\theta_2)}{Cosh(\tau\pi)}\sqrt{2}$$

$$B(\tau)=-\frac{T_0}{c}\frac{Cosh(\tau\theta_1)}{Cosh(\tau\pi)}\sqrt{2}$$

$$T_s(\eta,\theta)=-\frac{T_0}{c}\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(Cosh(\tau\theta_2)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta))+Cosh(\tau\theta_1)Sinh(\tau(\theta-\theta_2))\right)}{Cosh(\tau\pi)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))}\times\\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

$$Cosh(\tau\theta_2)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta))+Cosh(\tau\theta_1)Sinh(\tau(\theta-\theta_2))=$$
$$\frac{Sinh(\tau(\theta+\theta_1-\theta_2))+Sinh(\tau(\theta-\theta_1-\theta_2))-Sinh(\tau(\theta-2\pi-\vartheta_1-\theta_2))-Sinh(\tau(\theta+\theta_2-\vartheta_1-2\pi))}{2}$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta)=-\frac{T_0}{c\sqrt{2}}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(\begin{array}{l}Sinh(\tau(\theta+\theta_1-\theta_2))+Sinh(\tau(\theta-\theta_1-\theta_2))-\\-Sinh(\tau(\theta-\vartheta_1-\theta_2-2\pi))-Sinh(\tau(\theta+\theta_2-\vartheta_1-2\pi))\end{array}\right)}{Cosh(\tau\pi)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))}\times\\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}-\\ -\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\begin{array}{l}Sinh(\tau(\theta+\theta_1-\theta_2))+Sinh(\tau(\theta-\theta_1-\theta_2))-\\-Sinh(\tau(\theta-\vartheta_1-\theta_2-2\pi))-Sinh(\tau(\theta+\theta_2-\vartheta_1-2\pi))\end{array}\right)}{Cosh(\tau\pi)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))}\times\\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

On peut également montrer que cette solution s'écrit aussi en utilisant les identités sur les fonctions hyperboliques :

$$\frac{Sinh(a+b)+Sinh(a-b)}{2}=Sinh(a)Cosh(b)\quad\frac{Cosh(a+b)+Cosh(a-b)}{2}=Cosh(a)Cosh(b)$$

$$Sinh(\tau(\theta-\theta_1-\theta_2))-Sinh(\tau(\theta-\vartheta_1-\theta_2-2\pi))=2Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau(\pi-\theta+\vartheta_1+\theta_2))$$

$$Sinh(\tau(\theta+\theta_1-\theta_2))-Sinh(\tau(\theta+\theta_2-\vartheta_1-2\pi))=2Sinh(\tau(\pi+\vartheta_1-\theta_2))Cosh(\tau(\pi-\theta))$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{c}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}-\\ -\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\displaystyle\int_0^{+\infty}d\tau\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(\begin{array}{l}Sinh(\tau\pi)Cosh(\tau(\pi-\theta+\vartheta_1+\theta_2))+\\+Sinh(\tau(\pi+\vartheta_1-\theta_2))Cosh(\tau(\pi-\theta))\end{array}\right)}{Cosh(\tau\pi)Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_1-\theta_2))}\times\\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right]\end{array}\right\}.$$

Exemple : solution du problème de Dirichlet électrostatique sur le domaine extérieur de la différence de sphères : potentiel extérieur d'un corps au potentiel nul et placé dans un champ électrostatique uniforme orienté selon l'axe z négatif

D'après les lois physiques de l'électrostatique on sait que le potentiel à l'infini reprend la forme du potentiel dans un champ électrostatique uniforme, soit zE_0. Comme le potentiel est nul à la surface du conducteur parfait, il le demeure placé dans le champ électrique puisque la surface constitue une courbe d'iso-potentiel. On recherche donc la solution du problème sous la forme d'une somme. Le problème qui en découle est alors un problème de Dirichlet sur la surface du corps avec convergence en 0 de la solution à l'infini :

$$T(\eta,\theta) = E_0 z + T_s(\eta,\theta) \quad \Rightarrow f(\eta) = -E_0 z\big|_{\partial S} \quad \partial S = \{\theta = \theta_1\} \cup \{\theta = \theta_2\}$$

$$z = \frac{a\,Sin(\theta)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \Rightarrow f_1(\eta) = -E_0 a \frac{Sin(\theta_1)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta_1)} \quad f_2(\eta) = -E_0 a \frac{Sin(\theta_2)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta_2)}$$

$$T_s(\eta,\theta) = -E_0 a \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(A(\tau) Sin(\theta_2) Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_1 - \theta)) + B(\tau) Sin(\theta_1) Sinh(\tau(\theta - \theta_2))\right)}{Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_1 - \theta_2))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$avec \quad \theta \in [\theta_2, 2\pi + \vartheta_1] \quad et \quad A(\tau) = \tau\,Tanh(\pi\tau) \int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{(x - Cos(\theta_2))^{\frac{3}{2}}} \quad B(\tau) = \tau\,Tanh(\pi\tau) \int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{(x - Cos(\theta_1))^{\frac{3}{2}}}$$

On connait la valeur des dernières intégrales, donner dans l'ouvrage de V.Ditkine et A.Proudnikov aux éditions Mir : « Transformations intégrales et calcul opérationnel », où figure une table des transformations de Mehler-Fock en page 416, formule n°12.10 :

$$\int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{(x - Cos(\theta_2))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{Sin(\theta_2)} \frac{Sinh(\tau(\pi - \theta_2))}{Sinh(\pi\tau)} \quad \int_1^{+\infty} dx \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{(x - Cos(\theta_1))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{Sin(\theta_1)} \frac{Sinh(\tau(\pi - \theta_1))}{Sinh(\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow A(\tau) Sin(\theta_2) = 2\sqrt{2}\tau \frac{Sinh(\tau(\pi - \theta_2))}{Cosh(\pi\tau)} \quad B(\tau) Sin(\theta_1) = 2\sqrt{2}\tau \frac{Sinh(\tau(\pi - \theta_1))}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta) = -E_0 a 2\sqrt{2} \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \tau\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \times \\ \times \dfrac{\left(\begin{array}{l} Sinh(\tau(\pi - \theta_2)) Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_1 - \theta)) + \\ + Sinh(\tau(\pi - \theta_1)) Sinh(\tau(\theta - \theta_2)) \end{array} \right)}{Cosh(\pi\tau) Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_1 - \theta_2))} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = E_0 a \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} - \\ -2\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \tau\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \times \\ \times \dfrac{\left(\begin{array}{l} Sinh(\tau(\pi - \theta_2)) Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_1 - \theta)) + \\ + Sinh(\tau(\pi - \theta_1)) Sinh(\tau(\theta - \theta_2)) \end{array} \right)}{Cosh(\pi\tau) Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_1 - \theta_2))} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$avec \quad \theta \in [\theta_2, 2\pi + \vartheta_1]$$

La linéarisation des produits de sinus hypergéométrique n'apporte pas de simplification notable à l'expression obtenue.

Simplifions le problème en supposant que le corps est une lentille sphérique symétrique (on anticipe un peu sur l'exemple suivant) :

$$\vartheta_1 = \pi - \alpha_0 \quad \vartheta_2 = \pi + \alpha_0$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta) = -2\sqrt{2}E_0 a\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau\, Sinh(\tau\alpha_0)\left\{\begin{array}{l}\tau\, P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\times \\ \times\dfrac{Sinh(\tau(\theta-\pi-\alpha_0))-Sinh(\tau(3\pi-\alpha_0-\theta))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(2\pi-2\alpha_0))}\end{array}\right\}$$

De plus

$$Sinh(\tau(\theta-\pi-\alpha_0))-Sinh(\tau(3\pi-\alpha_0-\theta)) = -Sinh(\tau(2\pi-\theta-(\pi-\alpha_0)))-Sinh(\tau(2\pi-\theta+\pi-\alpha_0))$$

$$\left.\begin{array}{l}A=\tau(2\pi-\theta)\\ B=\tau(\pi-\alpha_0)\end{array}\right\}\Rightarrow Sinh(\tau(\theta-\pi-\alpha_0))-Sinh(\tau(3\pi-\alpha_0-\theta)) = -(Sinh(A+B)+Sinh(A-B))$$

$$Et \quad Sinh(A+B)+Sinh(A-B) = 2Sinh(A)Cosh(b)$$

$$\Rightarrow Sinh(\tau(\theta-\pi-\alpha_0))-Sinh(\tau(3\pi-\alpha_0-\theta)) = -2Sinh(\tau(2\pi-\theta))Cosh(\tau(\pi-\alpha_0))$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta) = 2\sqrt{2}E_0 a\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau\,\tau\,\frac{Sinh(\tau\alpha_0)Sinh(\tau(2\pi-\theta))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\alpha_0))}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = E_0 a\frac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} + 2\sqrt{2}E_0 a\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau\,\tau\left\{\begin{array}{l}\dfrac{Sinh(\tau\alpha_0)Sinh(\tau(2\pi-\theta))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\pi-\alpha_0))}\times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

$$avec\ \theta\in[\pi+\alpha_0, 3\pi-\alpha_0]$$

La solution donnée dans l'ouvrage de N.N.Lebedev, I.P.Skalkaya, Y.S.Ufliand « Problems of Mathematical physics » (problème n° 505 page 241) donne la solution en utilisant des variables angulaires modifiées :

$$\beta_0 = \pi-\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = \pi-\beta_0 \quad \beta = \theta-2\pi$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \left\{\begin{array}{l}E_0 a\dfrac{Sin(\theta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)} - \\ -2\sqrt{2}E_0 a\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\displaystyle\int_0^{+\infty} d\tau\,\tau\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\beta_0))Sinh(\tau\beta)}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau\beta_0)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\end{array}\right\}$$

$$avec\ \beta\in[-\pi+\alpha_0, \pi-\alpha_0] = [-\beta_0, \beta_0]$$

.

<u>Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine extérieur d'une lentille sphérique, ou également d'une union sphérique</u>

L'astuce consiste à considérer que *<u>la solution du problème extérieur sur la différence de sphère</u>* est applicable avec les deux angles :

$$\vartheta_1 = \pi - \alpha_1 \quad \alpha_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \vartheta_2 = \pi + \alpha_2 \quad \alpha_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \leftarrow \textit{Lentille sphérique}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_1 = \pi - \alpha_1 \quad \alpha_1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad \vartheta_2 = \pi + \alpha_2 \quad \alpha_2 \in [0, \pi] \\ \vartheta_1 = \pi - \alpha_1 \quad \alpha_1 \in [0, \pi] \quad \vartheta_2 = \pi + \alpha_2 \quad \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{array}\right\} \leftarrow \textit{Union sphérique}$$

La solution formelle s'écrit alors :

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{\left(A(\tau) Sinh(\tau(3\pi - \alpha_1 - \theta)) + B(\tau) Sinh(\tau(\theta - \pi - \alpha_2))\right)}{Sinh(\tau(2\pi - \alpha_1 - \alpha_2))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec \quad \theta \in [\pi + \alpha_2, 3\pi - \alpha_1] \quad et \quad \begin{cases} B(\tau) = \tau \, Tanh(\pi\tau) \displaystyle\int_0^{+\infty} d\eta \, \frac{f_1(\eta) Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta) + Cos(\alpha_1)}} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \\ A(\tau) = \tau \, Tanh(\pi\tau) \displaystyle\int_0^{+\infty} d\eta \, \frac{f_2(\eta) Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta) + Cos(\alpha_2)}} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{cases}$$

Si les deux fonctions limites sont constantes, il vient :

$$\begin{cases} f_1(\eta) = T_1 \Rightarrow B(\tau) = T_1 \dfrac{Cosh(\tau(\pi - \theta_1))}{Cosh(\pi\tau)} = T_1 \dfrac{Cosh(\tau\alpha_1)}{Cosh(\pi\tau)} \\ f_2(\eta) = T_2 \Rightarrow A(\tau) = T_2 \sqrt{2} \dfrac{Cosh(\tau(\pi - \theta_2))}{Cosh(\pi\tau)} = T_2 \sqrt{2} \dfrac{Cosh(\tau\alpha_2)}{Cosh(\pi\tau)} \end{cases}$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \begin{Bmatrix} \dfrac{\left(T_2 Cosh(\tau\alpha_2) Sinh(\tau(3\pi - \alpha_1 - \theta)) + T_1 Cosh(\tau\alpha_1) Sinh(\tau(\theta - \pi - \alpha_2))\right)}{Sinh(\tau(2\pi - \alpha_1 - \alpha_2)) Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{Bmatrix}$$

$$avec \quad \theta \in [\theta_2, 2\pi + \theta_1] \Leftrightarrow \theta \in [\pi + \alpha_2, 3\pi - \alpha_1]$$

Si la lentille est symétrique alors la solution se présente comme suit :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 \quad et \quad \theta \in [\pi + \alpha_0, 3\pi - \alpha_0]$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \begin{Bmatrix} \dfrac{Cosh(\tau\alpha_0)\left(T_2 Sinh(\tau(3\pi - \alpha_0 - \theta)) + T_1 Sinh(\tau(\theta - \pi - \alpha_0))\right)}{Sinh(\tau(2\pi - 2\alpha_0)) Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{Bmatrix}$$

Pour un problème totalement symétrique en condition aux limites, il vient :

$$\theta \in [\pi + \alpha_0, 3\pi - \alpha_0] \quad T_2 = T_1 = T_0$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2}T_0\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Cosh(\tau\alpha_0)\left(Sinh(\tau(3\pi - \alpha_0 - \theta)) + Sinh(\tau(\theta - \pi - \alpha_0))\right)}{Sinh(\tau(2\pi - 2\alpha_0))Cosh(\pi\tau)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$Comme \quad Sinh(a+b) - Sinh(a-b) = 2Cosh(a)Sinh(b)$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2}T_0\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\alpha_0)\left(\begin{array}{l} Sinh(\tau(2\pi - \theta + \pi - \alpha_0)) - \\ - Sinh(\tau(2\pi - \theta - (\pi - \alpha_0))) \end{array}\right)}{Sinh(\tau(2\pi - 2\alpha_0))Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$= 2\sqrt{2}T_0\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\alpha_0)Cosh(\tau(2\pi - \theta))Sinh(\tau(\pi - \alpha_0))}{2Sinh(\tau(\pi - \alpha_0))Cosh(\tau(\pi - \alpha_0))Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2}T_0\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\alpha_0)Cosh(\tau(2\pi - \theta))}{Cosh(\tau(\pi - \alpha_0))Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

<u>Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine intérieur d'une lentille ou d'une union sphérique</u>

On choisit tout d'abord le cas du domaine intérieur d'une lentille sphérique dont les conditions aux limites sont sans dépendance azimutale :

$$\Delta T(\eta,\vartheta) = 0 \quad T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=-\vartheta_0} = f_1(\eta) \quad T(\eta,\vartheta)\big|_{\vartheta=\vartheta_0} = f_2(\eta)$$

$$\alpha_1 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \alpha_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \leftarrow Lentille\ sphérique \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha_1 \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \quad \alpha_2 \in [0,\pi] \\ \alpha_1 \in [0,\pi] \quad \alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{array}\right\} \leftarrow Union\ sphérique$$

$$(\eta,\vartheta) \in D_{\text{int}} \quad D_{\text{int}} = \left\{(\eta,\vartheta) \in [0,+\infty] \times ([\pi - \alpha_1, \pi + \alpha_2]) \quad tq \quad \alpha_1 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

La solution intérieure se développe ainsi :

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(\theta - \pi + \alpha_1)) + B(\tau)Sinh(\tau(\pi + \alpha_2 - \theta))\right)}{Sinh(\tau(\alpha_2 + \alpha_1))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec \quad \left\{ \begin{array}{l} B(\tau) = \tau\, Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty} d\eta \frac{f_1(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta) + Cos(\alpha_1)}} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \\ A(\tau) = \tau\, Tanh(\pi\tau)\displaystyle\int_0^{+\infty} d\eta \frac{f_2(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta) + Cos(\alpha_2)}} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right.$$

Dans le cas où les fonctions limites sont constantes, on aboutit à une solution pour le problème intérieur :

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(T_2\, Cosh(\tau\,\alpha_2)Sinh(\tau(\theta - \pi + \alpha_1)) + T_1\, Cosh(\tau\,\alpha_1)Sinh(\tau(\pi + \alpha_2 - \theta))\right)}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\alpha_1 + \alpha_2))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

Lorsque les deux valeurs constantes sont identiques, on doit normalement retrouver une valeur constante. En effet en développant le produit des sinus et cosinus hyperbolique:

$$T_1 = T_2 = T_0 \quad Cosh(a)Sinh(b) = \frac{Sinh(a+b) - Sinh(a-b)}{2} \quad Sinh(a)Cosh(b) = \frac{Sinh(a+b) + Sinh(a-b)}{2}$$

$$T(\eta,\theta) = T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left(Cosh(\tau\alpha_2)Sinh(\tau(\theta-\pi+\alpha_1)) + Cosh(\tau\alpha_1)Sinh(\tau(\pi+\alpha_2-\theta))\right)}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\left[\begin{array}{l} Sinh(\tau\alpha_2 + \tau(\theta-\pi+\alpha_1)) - Sinh(\tau(\alpha_2-\alpha_1) - \tau(\theta-\pi)) \\ + Sinh(\tau\alpha_1 + \tau(\pi+\alpha_2-\theta)) - Sinh(\tau(\alpha_1-\alpha_2) - \tau(\pi-\theta)) \end{array} \right]}{2Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2))} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \end{array} \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \left\{ \frac{Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2) + \tau(\theta-\pi)) + Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2) - \tau(\theta-\pi))}{2Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right\}$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2))Cosh(\tau(\theta-\pi))}{Cosh(\pi\tau)Sinh(\tau(\alpha_1+\alpha_2))} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$= T_0\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(\theta-\pi))}{Cosh(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$= T_0$$

On peut noter le cas particulier d'une lentille ou d'une union sphérique symétrique $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, tout d'abord avec des fonctions limites symétriques soit de valeur identique $f_1(\eta) = f_2(\eta) = f(\eta)$:

$$Sinh(a)Cosh(b) = \frac{Sinh(a+b) + Sinh(a-b)}{2}$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{A(\tau)\left(Sinh(\tau(\alpha_0 + (\theta-\pi))) + Sinh(\tau(\alpha_0 - (\theta-\pi)))\right)}{Sinh(2\tau\alpha_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{A(\tau)Sinh(\tau\alpha_0)Cosh(\tau(\theta-\pi))}{Cosh(\tau\alpha_0)Sinh(\tau\alpha_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{A(\tau)Cosh(\tau(\theta-\pi))}{Cosh(\tau\alpha_0)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec \quad A(\tau) = \tau\, Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty} d\eta \frac{f(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta) + Cos(\alpha_0)}} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

.

Supposons maintenant que les deux fonctions limites soient de valeur opposée: $f_1(\eta)=-f_2(\eta)=f(\eta)$. Alors la solution du problème doit exhiber la propriété de parité sur la variable θ $T(\eta,-\vartheta)=-T(\eta,\vartheta)$, il vient donc :

$$Cosh(a)Sinh(b)=\frac{Sinh(a+b)-Sinh(a-b)}{2}$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,A(\tau)\frac{(Sinh(\tau(\alpha_0+(\pi-\theta)))-Sinh(\tau(\alpha_0-(\pi-\theta))))}{Sinh(2\tau\alpha_0)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,A(\tau)\frac{Cosh(\tau\alpha_0)Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(\tau\alpha_0)Cosh(\tau\alpha_0)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,A(\tau)\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(\tau\alpha_0)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec\quad A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\alpha_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

On vérifie immédiatement que la valeur s'annule sur la section θ=π, représentant le disque de rayon a. Lorsque la condition aux limites est constante dans ce cas antisymétrique, il vient :

$$f(\eta)=T_0\Rightarrow A(\tau)=T_0\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\alpha_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=T_0\sqrt{2}\,\frac{Cosh(\tau\,\alpha_0)}{Cosh(\pi\tau)}$$

$$T(\eta,\theta)=T_0\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\,\alpha_0)}{Cosh(\pi\tau)}\,\frac{Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Sinh(\tau\alpha_0)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta)=T_0\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cotanh(\tau\,\alpha_0)Sinh(\tau(\pi-\theta))}{Cosh(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

.

Reprenons la cas de la lentille sphérique symétrique avec des conditions aux limites identiques, pour lesquelles la valeur en η est d'abord constante en puis s'annule au delà de η= η0 (fonction en escalier) :

$$f(\eta)=\begin{cases}T_0 & pour\quad \eta\in[0,\eta_0]\\ 0 & pour\quad \eta\in[\eta_0,+\infty]\end{cases}\Rightarrow A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{\eta_0}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\alpha_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$x_0=Cosh(\eta_0)\quad x=Cosh(\eta)\Rightarrow A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{x_0}dx\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x+Cos(\alpha_0)}}$$

$$T(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{A(\tau)Cosh(\tau(\theta-\pi))}{Cosh(\tau\alpha_0)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

.

Exemple : solution du problème de Dirichlet sur le domaine extérieur d'une coupole ou coquille sphérique

Seule demeure une coupole sphérique en considérant que les deux angles du problème aux limites n'en sont plus qu'un seul $\theta=\theta_0$. La problème de Dirichlet devient donc le problème extérieure avec une seule condition aux limites sur l'iso-surface de l'angle $\theta=\theta_0$. La solution devient immédiatement :

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$$

$$T(\eta,\theta) = \sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{\left(A(\tau)Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_0 - \theta)) + B(\tau)Sinh(\tau(\theta - \theta_0))\right)}{Sinh(2\pi\,\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec \quad \theta \in [\theta_0, 2\pi + \vartheta_0] \quad et \quad A(\tau) = B(\tau) = \tau\, Tanh(\pi\tau) \int_0^{+\infty} d\eta \, \frac{f_0(\eta) Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta_0)}} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) .$$

Dans le cas où la fonction limite est constante, la fonction $A(\tau)$ se calcule directement :

$$f(\eta) = T_0 \Rightarrow A(\tau) = T_0 \sqrt{2} \, \frac{Cosh(\tau(\pi - \theta_0))}{Cosh(\pi\tau)}$$

Il vient la solution :

$$T(\eta,\theta) = T_0 \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau(\pi - \theta_0))}{Cosh(\pi\tau)} \frac{\left(Sinh(\tau(2\pi + \vartheta_0 - \theta)) + Sinh(\tau(\theta - \theta_0))\right)}{Sinh(2\pi\,\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$= T_0 \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau(\pi - \theta_0))}{Cosh^2(\pi\tau)} \begin{pmatrix} Cosh(\tau\pi)Cosh(\tau(\theta - \theta_0)) - \\ - Sinh(\pi\tau)Sinh(\tau(\theta - \theta_0)) \end{pmatrix} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$T(\eta,\theta) = T_0 \sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)} \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau(\pi - \theta_0))Cosh(\tau(\pi + \theta_0 - \theta))}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

On peut linéariser le produit des cosinus hyperboliques :

$$Cosh(\tau(\pi - \theta_0))Cosh(\tau(\pi + \theta_0 - \theta)) = \frac{Cosh(\tau(2\pi - \theta)) + Cosh(\tau(2\theta_0 - \theta))}{2}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta) = T_0 \, \frac{\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}}{2} \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau(2\pi - \theta)) + Cosh(\tau(2\theta_0 - \theta))}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$= T_0 \, \frac{\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}}{2} \left(\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau(2\pi - \theta))}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) + \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau(2\theta_0 - \theta))}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) \right)$$

Pour la suite du calcul on utilise la formule suivante donnée dans l'ouvrage en russe « A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series - Volume 3 - More Special Functions» en page 181 formule 2.17.24.6 (la formule contient une erreur dans le deuxième terme à droite) :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c - Cos(b)}} \left(1 - \frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1 + Cos(b)}{c - Cos(b)}} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{c - Cos(b)}} \left(\frac{\pi}{2} - Arctan\left(\sqrt{\frac{1 + Cos(b)}{c - Cos(b)}} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1 + Cos(b)}{c - Cos(b)}} \right)}{\sqrt{c - Cos(b)}}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \, \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1 + Cos(b)}{1 + c}} \right)}{\sqrt{c - Cos(b)}}$$

.
Soit en l'appliquant aux intégrales suivantes :

$$b = 2\pi - \theta \quad c = Cosh(\eta) \quad \sqrt{1 + Cos(b)} = \sqrt{2}Cos\left(\frac{b}{2}\right) = -\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad Arctan(-x) = -Arctan(x)$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(2\pi - \theta))}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}\left(1 + \frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}\right)\right)$$

$$b = 2\theta_0 - \theta \quad c = Cosh(\eta) \quad \sqrt{1 + Cos(b)} = \sqrt{2}Cos\left(\frac{b}{2}\right) = \sqrt{2}Cos\left(\frac{2\theta_0 - \theta}{2}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau(2\theta_0 - \theta))}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta)) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}}\left(1 - \frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{2\theta_0 - \theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}}\right)\right)$$

Il vient la solution :

$$T(\eta,\theta) = T_0 \frac{\sqrt{2Cosh(\eta) - 2Cos(\theta)}}{2}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}\left(1 + \frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}\right)\right) + \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}}\left(1 - \frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{2\theta_0 - \theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}}\right)\right) \end{array}\right)$$

$$T(\eta,\theta) = \frac{T_0}{2}\left(\begin{array}{l} 1 + \frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}} + \frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}\right) + \\ -\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{2\theta_0 - \theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta) - Cos(2\theta_0 - \theta)}}\right) \end{array}\right)$$

Qui est l'expression donnée par N.N.Lebedev dans son ouvrage *« Special Functions and their applications », page 230, section 8.12, formule 8.12.13.* En utilisant, si on le souhaite la fonction Arccotangente, il vient :

$$ArcCotan(-x)=\frac{\pi}{2}+Arctan(x) \quad et \quad ArcCotan(x)=\frac{\pi}{2}-Arctan(x)$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{\pi}\left(\begin{array}{l} ArcCotan\left(-\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)+ \\ +\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(2\theta_0-\theta)}}ArcCotan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{2\theta_0-\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(2\theta_0-\theta)}}\right)\end{array}\right)$$

En utilisant l'expression avec la fonction ArcCos, il vient :

$$\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+Cosh(\eta)}}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(b)}}$$

$$b=2\pi-\theta \quad c=Cosh(\eta) \quad \sqrt{1+Cos(b)}=\sqrt{2}Cos\left(\frac{b}{2}\right)=-\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \sqrt{1+Cosh(\eta)}=\sqrt{2}Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+Cosh(\eta)}}=\frac{Cos\left(\frac{b}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}=-\frac{Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(\tau(2\pi-\theta))}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(-\frac{Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}$$

$$b=2\theta_0-\theta \quad c=Cosh(\eta) \quad \sqrt{1+Cos(b)}=\sqrt{2}Cos\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{2}Cos\left(\frac{2\theta_0-\theta}{2}\right)\Rightarrow \sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+Cosh(\eta)}}=\frac{Cos\left(\frac{2\theta_0-\theta}{2}\right)}{Cos\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(\tau(2\theta_0-\theta))}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(\frac{Cos\left(\frac{2\theta_0-\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(2\theta_0-\theta)}}$$

Et la solution s'écrit donc :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{\pi}\left(ArcCos\left(-\frac{Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right)+\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(2\theta_0-\theta)}}ArcCos\left(\frac{Cos\left(\frac{2\theta_0-\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right)\right).$$

Le cas limite θ_0->π, donne la solution du problème aux limites sur le disque de rayon a centré à l'origine en coordonnées toroïdales. Il vient :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{2}\left(2+\frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=T_0\left(1+\frac{2}{\pi}Arctan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)\right)$$

En utilisant la fonction moins usitée ArcCotangente, il vient :

$$ArcCotan(x)=\frac{\pi}{2}-Arctan(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=T_0\left(2-\frac{2}{\pi}Arccotan\left(\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)\right)$$

$$Comme \quad ArcCotan(-x)=\pi-ArcCotan(x)\Leftrightarrow ArcCotan(x)=\pi-ArcCotan(-x)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=T_0\left(2-\frac{2}{\pi}\left(\pi-Arccotan\left(-\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{2T_0}{\pi}Arccotan\left(-\frac{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}\right)$$

En utilisant la fonction ArcCos, il vient :

$$T(\eta,\theta)=\frac{2T_0}{\pi}ArcCos\left(-\frac{Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right)\qquad \theta\in[\pi,3\pi]$$

Convertissons ce résultat en coordonnées cylindriques à l'aide de ce petit formulaire de passage.

<u>Formulaire de passage entre les coordonnées toroïdales et les coordonnées cylindriques 3D</u>

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{cCosh(\eta)}{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\quad \frac{z}{\rho}=\frac{Sin(\theta)}{Sinh(\eta)}\quad \vartheta\in[0,4\pi]\quad \eta\in[0,+\infty]$$

$$Tanh(\eta)=\frac{2c\rho}{z^2+\rho^2+c^2}\quad e^{\eta}=\frac{\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}}$$

$$Cosh(\eta)=\frac{z^2+\rho^2+c^2}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}\quad Sinh(\eta)=\frac{2c\rho}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}$$

$$Tan(\theta)=\frac{2cz}{z^2+\rho^2-c^2}$$

$$Cos(\theta)=\frac{z^2+\rho^2-c^2}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}\quad Sin(\theta)=\frac{2cz}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}$$

$$Cosh(\eta)-Cos(\theta)=\frac{2c^2}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}\Rightarrow\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}=\sqrt{\frac{2c^2}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}$$

$$\sqrt{2}Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(z^2+\rho^2+c^2)}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}+1}\quad \sqrt{2}Sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(z^2+\rho^2+c^2)}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}-1}$$

$$\sqrt{2}Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sigma_c\sqrt{1+\frac{(z^2+\rho^2-c^2)}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}\quad \sqrt{2}Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sigma_s\sqrt{1-\frac{(z^2+\rho^2-c^2)}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}$$

$$\sigma_c=Signe\left(Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\begin{cases}+1 & \theta\in[0,\pi]\\-1 & \theta\in[\pi,2\pi]\\-1 & \theta\in[2\pi,3\pi]\\+1 & \theta\in[3\pi,4\pi]\end{cases}\quad \sigma_s=Signe\left(Sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\begin{cases}+1 & \theta\in[0,\pi]\\+1 & \theta\in[\pi,2\pi]\\-1 & \theta\in[2\pi,3\pi]\\-1 & \theta\in[3\pi,4\pi]\end{cases}$$

__Application à la solution du disque__

$$T(\eta,\theta)=\frac{2T_0}{\pi}ArcCos\left(-\frac{Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right)=\frac{2T_0}{\pi}ArcCos\left(-\frac{\sigma_c\sqrt{1+\frac{\left(z^2+\rho^2-c^2\right)}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}}{\sqrt{1+\frac{\left(z^2+\rho^2+c^2\right)}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}}\right)$$

$$=\frac{2T_0}{\pi}ArcCos\left(\frac{\sqrt{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}}\right)$$

$$De\ plus\ ArcCos(y)=ArcSin\left(\sqrt{1-y^2}\right)\quad 1-y^2=1-\frac{z^2+\rho^2-c^2+\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}$$

$$\left(\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}+\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}\right)^2=2z^2+2\rho^2+2c^2+2\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}$$

$$\Rightarrow 1-y^2=\frac{2c^2}{z^2+\rho^2+c^2+\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}=\frac{4c^2}{\left(\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}+\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1-y^2}=\frac{2c}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}+\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}$$

$$T(\eta,\theta)=\frac{2T_0}{\pi}ArcSin\left(\frac{2c}{\sqrt{z^2+(\rho-c)^2}+\sqrt{z^2+(\rho+c)^2}}\right)$$

.

C'est bien l'expression donner dans le livre de J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, page 92, formule n°3.178.

Pour démontrer la formule donnée en référence :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c-Cos(b)}}\left(1-\frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c-Cos(b)}} ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)$$

$$Avec\ la\ fonction\ ArcCotan \quad Arctan(x) = \frac{\pi}{2} - ArcCotan(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c-Cos(b)}} ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)$$

On va d'abord commencer par démontrer la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c-Cosh(a)}} Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}}\right).$$

Et partons de la représentation intégrale de la fonction conique de Mehler :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} Cosh(\pi\tau)\int_0^{+\infty} d\theta \frac{Cos(\tau\theta)}{\sqrt{c+Cosh(\theta)}}$$

Il vient :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh(\pi\tau)}\int_0^{+\infty} d\theta \frac{Cos(\tau\theta)}{\sqrt{c+Cosh(\theta)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty} d\theta \frac{1}{\sqrt{c+Cosh(\theta)}}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau a)Cos(\tau\theta)}{Cosh(\pi\tau)}$$

Or on peut utiliser la formule suivante que l'on va démontrer plus loin

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(p\tau)Cos(r\tau)}{Cosh(q\tau)} = \frac{\pi}{q}\frac{Cosh\left(\frac{\pi p}{2q}\right)Cosh\left(\frac{\pi r}{2q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi p}{q}\right)+Cosh\left(\frac{\pi r}{q}\right)} \Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau a)Cos(\tau\theta)}{Cosh(\pi\tau)} = \frac{Cosh\left(\frac{a}{2}\right)Cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)}{Cosh(a)+Cosh(\theta)}.$$

Il vient alors :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} Cosh\left(\frac{a}{2}\right)\int_0^{+\infty} d\theta \frac{Cosh\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{c+Cosh(\theta)}}\frac{1}{Cosh(a)+Cosh(\theta)} \Leftarrow Cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+Cosh(\theta)}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+Cosh(a)}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} d\theta \frac{\sqrt{1+Cosh(\theta)}}{(Cosh(a)+Cosh(\theta))\sqrt{c+Cosh(\theta)}} \Leftarrow Cosh\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+Cosh(a)}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{1+Cosh(a)}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} d\theta \frac{\sqrt{1+Cosh(\theta)}}{(Cosh(a)+Cosh(\theta))\sqrt{c+Cosh(\theta)}}$$

$$Posons\ s = Cosh(\theta) \quad ds = Sinh(\theta)d\theta = d\theta\sqrt{Cosh^2(\theta)-1} = d\theta\sqrt{s^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{1+Cosh(a)}}{\pi\sqrt{2}}\int_1^{+\infty} ds \frac{1}{(Cosh(a)+s)\sqrt{s-1}\sqrt{c+s}}$$

$$Posons\ \varsigma = Cosh(a)+s$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{1+Cosh(a)}}{\pi\sqrt{2}}\int_{1+Cosh(a)}^{+\infty} d\varsigma \frac{1}{\varsigma\sqrt{\varsigma-1-Cosh(a)}\sqrt{\varsigma+c-Cosh(a)}}$$

La dernière intégrale peut être assimilée à une intégrale connue faisant intervenir la fonction hypergéométrique :

$$\int_{d}^{+\infty} d\varsigma\ \varsigma^{-\lambda}(\varsigma+b)^{\nu}(\varsigma-d)^{\mu-1} = d^{-\lambda}(d+b)^{\mu+\nu} B(\lambda-\mu-\nu,\mu)\ {}_2F_1\left(\lambda,\mu;\lambda-\nu;-\frac{b}{d}\right)$$

$$Comme \quad B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad fonction\ Beta$$

$$\int_{d}^{+\infty} d\varsigma\ \varsigma^{-\lambda}(\varsigma+b)^{\nu}(\varsigma-d)^{\mu-1} = d^{-\lambda}(d+b)^{\mu+\nu} \frac{\Gamma(\lambda-\mu-\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda-\nu)}\ {}_2F_1\left(\lambda,\mu;\lambda-\nu;-\frac{b}{d}\right).$$

En identifiant les paramètres dans la formule précédente, il vient :

$$\lambda=1 \quad \nu=-\frac{1}{2} \quad \mu=\frac{1}{2} \quad \mu+\nu=0 \quad d=1+Cosh(a) \quad b=c-Cosh(a)$$

$$\int_{1+Cosh(a)}^{+\infty} d\varsigma \frac{1}{\varsigma\sqrt{\varsigma-1-Cosh(a)}\sqrt{\varsigma+c-Cosh(a)}} = \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{{}_2F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{Cosh(a)-c}{1+Cosh(a)}\right)}{1+Cosh(a)}$$

$$\Rightarrow \int_{1+Cosh(a)}^{+\infty} d\varsigma \frac{1}{\varsigma\sqrt{\varsigma-1-Cosh(a)}\sqrt{\varsigma+c-Cosh(a)}} = 2\frac{{}_2F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{Cosh(a)-c}{1+Cosh(a)}\right)}{1+Cosh(a)}$$

$$D'autre\ part \quad F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)=\frac{Arctan(z)}{z} \Rightarrow {}_2F_1\left(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}\right)=\sqrt{\frac{1+Cosh(a)}{c-Cosh(a)}}Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{1+Cosh(a)}^{+\infty} d\varsigma \frac{1}{\varsigma\sqrt{\varsigma-1-Cosh(a)}\sqrt{\varsigma+c-Cosh(a)}} = 2\frac{Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}}\right)}{\sqrt{(1+Cosh(a))(c-Cosh(a))}}$$

Cette intégrale introduite dans le calcul précédent donne :

$$\int_{0}^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\ a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{1+Cosh(a)}}{\pi\sqrt{2}}\, 2\frac{Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}}\right)}{\sqrt{(1+Cosh(a))(c-Cosh(a))}}$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\ a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{(c-Cosh(a))}} Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}}\right) \quad c.q.f.d$$

Au passage démontrons la formule intermédiaire que nous avons introduite précédemment:

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(p\tau)Cos(r\tau)}{Cosh(q\tau)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos((p+r)\tau)+Cos((p-r)\tau)}{Cosh(q\tau)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(i(p+r)\tau)+Cosh(i(p-r)\tau)}{Cosh(q\tau)} \quad Comme \quad \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(a\tau)}{Cosh(b\tau)} = \frac{\pi}{2b}\frac{1}{Cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(i(p+r)\tau)}{Cosh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{Cos\left(i\frac{\pi(p+r)}{2q}\right)} \quad et \quad \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(i(p-r)\tau)}{Cosh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{Cos\left(i\frac{\pi(p-r)}{2q}\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(p\tau)Cos(r\tau)}{Cosh(q\tau)} = \frac{\pi}{4q}\left(\frac{Cos\left(i\frac{\pi(p-r)}{2q}\right)+Cos\left(i\frac{\pi(p+r)}{2q}\right)}{Cos\left(i\frac{\pi(p+r)}{2q}\right)Cos\left(i\frac{\pi(p-r)}{2q}\right)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2q}\left(\frac{Cosh\left(\frac{\pi(p-r)}{2q}\right)+Cosh\left(\frac{\pi(p+r)}{2q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi(p+r)}{2q}+\frac{\pi(p-r)}{2q}\right)+Cosh\left(\frac{\pi(p+r)}{2q}-\frac{\pi(p-r)}{2q}\right)}\right) = \frac{\pi}{q}\frac{Cosh\left(\frac{\pi p}{2q}\right)Cosh\left(\frac{\pi r}{2q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi p}{q}\right)+Cosh\left(\frac{\pi r}{q}\right)}$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(p\tau)Cos(r\tau)}{Cosh(q\tau)} = \frac{\pi}{q}\frac{Cosh\left(\frac{\pi p}{2q}\right)Cosh\left(\frac{\pi r}{2q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi p}{q}\right)+Cosh\left(\frac{\pi r}{q}\right)}$$

La formule précédente :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cos(\tau\, a)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c-Cosh(a)}} Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cosh(a)}{1+Cosh(a)}}\right)$$

ayant été démontrée, il suffit de poser a=ib. Il vient alors :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c-Cos(b)}} Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cos(b)}{1+Cos(b)}}\right)$$

$$De\ plus \quad Arctan\left(\sqrt{\frac{c-Cos(b)}{1+Cos(b)}}\right) + Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{c-Cos(b)}}\left(1-\frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right)$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c-Cos(b)}}\left(1-\frac{2}{\pi} Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right)$$

.

Démontrons également la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(p\tau)Sin(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}\frac{Sinh\left(\frac{\pi r}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi r}{q}\right)+Cos\left(\frac{\pi p}{q}\right)} \quad p\in[0,q[$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(p\tau)Sin(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(p\tau)Sinh(ir\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh((p+ir)\tau)-Sinh((p-ir)\tau)}{Sinh(q\tau)}$$

$$Comme \quad \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh(a\tau)}{Sinh(b\tau)} = \frac{\pi}{2b}Tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \quad b>|a|$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh((p+ir)\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}Tan\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right) \quad et \quad \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Sinh((p+ir)\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2q}Tan\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(p\tau)Sin(r\tau)}{Sinh(q\tau)} = \frac{\pi}{2qi}\left(Tan\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)+Tan\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2qi}\left(\frac{Sin\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)}{Cos\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)} - \frac{Sin\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}{Cos\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2qi}\left(\frac{Sin\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)Cos\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right) - Cos\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)Sin\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}{Cos\left(\frac{\pi(p+ir)}{2q}\right)Cos\left(\frac{\pi(p-ir)}{2q}\right)}\right)$$

$$Cos(a)Cos(b) = \frac{1}{2}(Cos(a+b)+Cos(a-b))$$

$$= \frac{\pi}{2qi}\left(\frac{Sin\left(\frac{i\pi r}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi r}{q}\right)+Cos\left(\frac{\pi p}{q}\right)}\right) = \frac{\pi}{2q}\frac{Sinh\left(\frac{\pi r}{q}\right)}{Cosh\left(\frac{\pi r}{q}\right)+Cos\left(\frac{\pi p}{q}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{r} q=2\pi \\ \Rightarrow r=\vartheta \\ p=b \end{array}\right\} \quad \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(b\tau)Sin(\vartheta\tau)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{4}\frac{Sinh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)+Cos\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Une autre démonstration de cette formule est proposée par N.N.Lebedev :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c-Cos(b)}}\left(1-\frac{2}{\pi}Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right) \quad c=Cosh(\alpha)$$

.

En partant de la représentation intégrale de la fonction conique de Mehler :

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}Cotanh(\pi\tau)\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sin(\tau\theta)}{\sqrt{Cosh(\theta)-Cosh(\alpha)}}$$

.

Il vient en injectant cette représentation dans l'intégrale initiale :

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)}{2Cosh(\pi\tau)Sinh(\pi\tau)}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sin(\tau\theta)}{\sqrt{Cosh(\theta)-Cosh(\alpha)}}$$

Inversion de l'ordre d'intégration

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty} d\tau \int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Cosh(\tau\ b)}{Sinh(2\pi\tau)} \frac{Sin(\tau\theta)}{\sqrt{Cosh(\theta)-Cosh(\alpha)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)}{Sinh(2\pi\tau)} \frac{Sin(\tau\theta)}{\sqrt{Cosh(\theta)-Cosh(\alpha)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{1}{\sqrt{Cosh(\theta)-Cosh(\alpha)}} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)Sin(\tau\theta)}{Sinh(2\pi\tau)}$$

$$Comme \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)Sin(\tau\theta)}{Sinh(2\pi\tau)} = \frac{1}{4}\frac{Sinh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)+Cos\left(\frac{b}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_\alpha^{+\infty} d\theta \frac{Sinh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\left(Cosh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)+Cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)\sqrt{Cosh(\theta)-Cosh(\alpha)}}$$

$$Posons\ s = Cosh(\theta) \quad ds = Sinh(\theta)d\theta \quad Cosh\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+s}{2}} \quad Sinh\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau \frac{Cosh(\tau\ b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_{Cosh(\alpha)}^{+\infty} ds \frac{Sinh\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+s}{2}}+Cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)Sinh(\theta)\sqrt{s-Cosh(\alpha)}}$$

$$= \frac{1}{\pi 2\sqrt{2}}\int_{Cosh(\alpha)}^{+\infty} ds \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1+s}{2}}+Cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)\sqrt{\frac{1+s}{2}}\sqrt{s-Cosh(\alpha)}} \leftarrow \varsigma = \frac{1+s}{2} \quad d\varsigma = \frac{ds}{2}$$

$$\sqrt{s-Cosh(\alpha)} = \sqrt{2}\sqrt{\varsigma - \frac{1+Cosh(\alpha)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1+Cosh(\alpha)}{2}}^{+\infty} d\varsigma \frac{1}{\sqrt{\varsigma}\left(\sqrt{\varsigma}+Cos\left(\frac{b}{2}\right)\right)\sqrt{\varsigma-\frac{1+Cosh(\alpha)}{2}}} \leftarrow \begin{cases} c = \sqrt{\frac{1+Cosh(\alpha)}{2}} \\ \beta = Cos\left(\frac{b}{2}\right) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{c^2}^{+\infty} d\varsigma \frac{1}{\sqrt{\varsigma}(\sqrt{\varsigma}+\beta)\sqrt{\varsigma-c^2}} = \frac{1}{\pi}\int_c^{+\infty}\frac{du}{(u+\beta)\sqrt{u^2-c^2}} \leftarrow u = \sqrt{\varsigma} \quad du = \frac{d\varsigma}{2\sqrt{\varsigma}}$$

..

Si l'on calcule la dernière intégrale, il vient :

$$Calculons \quad \int_c^{+\infty} \frac{du}{(u+\beta)\sqrt{u^2-c^2}} = \frac{ArcCos\left(\frac{\beta}{c}\right)}{\sqrt{c^2-\beta^2}} = \frac{ArcCos\left(\frac{Cos\left(\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1+Cosh(\alpha)}{2}}}\right)}{\sqrt{\frac{1+Cosh(\alpha)}{2} - Cos^2\left(\frac{b}{2}\right)}}$$

$$Cos\left(\frac{b}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+Cos(b)}{2}} \Rightarrow \int_c^{+\infty} \frac{du}{(u+\beta)\sqrt{u^2-c^2}} = \frac{ArcCos\left(\frac{\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{2}}}{\sqrt{\frac{1+Cosh(\alpha)}{2}}}\right)}{\sqrt{\frac{1+Cosh(\alpha)}{2} - \frac{1+Cos(b)}{2}}}$$

$$\int_c^{+\infty} \frac{du}{(u+\beta)\sqrt{u^2-c^2}} = \sqrt{2}\,\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+Cosh(\alpha)}}\right)}{\sqrt{Cosh(\alpha)-Cos(b)}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+Cosh(\alpha)}}\right)}{\sqrt{Cosh(\alpha)-Cos(b)}}$$

$$A\ comparer\ avec\ la\ formule \quad \int_0^{+\infty} d\tau\,\frac{Cosh(\tau\, b)}{Cosh^2(\pi\tau)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\alpha)) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{Cosh(\alpha)-Cos(b)}}\right)}{\sqrt{Cosh(\alpha)-Cos(b)}}$$

$$Or \quad ArcCos\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+Cosh(\alpha)}}\right) = ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{Cosh(\alpha)-Cos(b)}}\right)$$

$$Puisque\ ArcCos(t) = ArcCotan\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \Leftrightarrow ArcCos\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = ArcCotan(t) \quad c.q.f.d$$

$$De\ plus\ Cos(ArcTan(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad Sin(ArcTan(t)) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad ArcCotan(t) = \frac{\pi}{2} - ArcTan(t)$$

.

Exemple : solution du problème de Dirichlet électrostatique sur le domaine extérieur d'une coupole sphérique : potentiel dû à une charge placé à l'origine des coordonnées

Selon le procédé usuel, nous allons retrancher de la solution recherchée le potentiel dû à la charge placé à l'origine des coordonnées toroïdales (également origine des coordonnées cartésiennes) afin de transformer le problème homogène de Dirichlet sur la surface de la coupole : potentiel nul en un problème de Dirichlet avec une valeur limite égale à l'opposée du potentiel crée par la charge. Cela donne

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+T_s(\eta,\theta) \quad \Rightarrow f(\eta)=-\left.\frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{\partial S} \qquad \partial S=\{\theta=\theta_0\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{c\sqrt{\frac{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^2}}}=\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{\sqrt{Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)}}=\frac{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}$$

$$=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}\Rightarrow f(\eta)=-\frac{T_0}{c}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_0)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta_0)}}$$

$$T_s(\eta,\theta)=\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\ A(\tau)\frac{\left(Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta))+Sinh(\tau(\theta-\theta_0))\right)}{Sinh(2\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$avec \quad \theta\in[\theta_0,2\pi+\vartheta_0] \quad et \quad A(\tau)=\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{f(\eta)Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow A(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_0)}}\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta_0)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\Rightarrow A(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_0^{+\infty}d\eta\,\frac{Sinh(\eta)}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\Leftarrow x=Cosh(\eta)$$

$$\Rightarrow A(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x+Cos(\theta_0)}}$$

On connait la valeur de cette dernière intégrale à partir d'un développement intégrale connu que l'on peut identifier avec les termes de la transformation intégrale de Mehler-Fock. Il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x+Cos(\theta_0)}}=\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{Cosh(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\Leftrightarrow\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{Cosh(\tau\pi)}=\tau\,Tanh(\tau\pi)\int_1^{+\infty}dx\,\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x+Cos(\theta_0)}}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

$$\Rightarrow\int_1^{+\infty}dx\,\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{2}\sqrt{x+Cos(\theta_0)}}=\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{Cosh(\tau\pi)\tau\,Tanh(\tau\pi)}=\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{\tau\,Sinh(\tau\pi)}$$

.

$$A(\tau)=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\int_1^{+\infty}dx\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}{\sqrt{x+Cos(\theta_0)}}=-\frac{T_0}{c}\tau\,Tanh(\pi\tau)\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{\tau\,Sinh(\tau\pi)}\sqrt{2}=-\frac{T_0}{c}\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{Cosh(\tau\pi)}\sqrt{2}$$

$$T_s(\eta,\theta)=-\frac{T_0}{c}\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\theta_0)}{Cosh(\tau\pi)}\frac{\left(Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta))+Sinh(\tau(\theta-\theta_0))\right)}{Sinh(2\pi\,\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$\frac{\left(Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta))+Sinh(\tau(\theta-\theta_0))\right)}{Sinh(2\pi\,\tau)}=\frac{\left(Sinh(\tau(2\pi+\vartheta_0-\theta))+Sinh(\tau(\theta-\theta_0))\right)}{2Cosh(\pi\,\tau)Sinh(\pi\,\tau)}$$

$$=\frac{Cosh(\tau\pi)Cosh(\tau(\theta-\theta_0))-Sinh(\pi\tau)Sinh(\tau(\theta-\theta_0))}{Cosh(\pi\,\tau)}=\frac{Cosh(\tau(\pi+\theta_0-\theta))}{Cosh(\pi\,\tau)}$$

$$\Rightarrow T_s(\eta,\theta)=-\frac{T_0}{c}\sqrt{2}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\theta_0)Cosh(\tau(\pi+\theta_0-\theta))}{Cosh^2(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

La solution du problème aux limites est donc la suivante :

$$T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{c}\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}\left(\frac{1}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}-\sqrt{2}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\theta_0)Cosh(\tau(\pi+\theta_0-\theta))}{Cosh^2(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))\right)$$

L'intégrale peut être calculée jusqu'au bout en linéarisant le produit de cosinus hyperbolique :

$$Cosh(\tau\theta_0)Cosh(\tau(\pi+\theta_0-\theta))=\frac{Cosh(\tau(\pi+2\theta_0-\theta))+Cosh(\tau(\pi-\theta))}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau\theta_0)Cosh(\tau(\pi+\theta_0-\theta))}{Cosh^2(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi+2\theta_0-\theta))+Cosh(\tau(\pi-\theta))}{Cosh^2(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))$$

$$Or\quad\int_0^{+\infty}d\tau\frac{Cosh(\tau\,b)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{c-Cos(b)}}\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)\right)$$

$$\int_0^{+\infty}d\tau\frac{Cosh(\tau\,b)}{Cosh^2(\pi\tau)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(c)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCotan\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{c-Cos(b)}}\right)}{\sqrt{c-Cos(b)}}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1+Cos(b)}{1+c}}\right)}{\sqrt{c-Cos(b)}}$$

$$\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi+2\theta_0-\theta))}{Cosh^2(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1-Cos(2\theta_0-\theta)}{1+Cosh(\eta)}}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(b)}}$$

$$\int_0^{+\infty}d\tau\,\frac{Cosh(\tau(\pi-\theta))}{Cosh^2(\tau\pi)}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(Cosh(\eta))=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cosh(\eta)}}\right)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(b)}}$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta)=\frac{T_0}{c}\left(\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\sqrt{Cosh(\eta)+Cos(\theta)}}-\frac{1}{\pi}\left\{ArcCos\left(\sqrt{\frac{1-Cos(2\theta_0-\theta)}{1+Cosh(\eta)}}\right)+ArcCos\left(\sqrt{\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cosh(\eta)}}\right)\right\}\right).$$

Expression finale qui s'avère relativement condensée.

Représentations intégrales des fonctions de Legendre et des fonctions associées de Legendre

Références **:**
- A.Erdelyi.H.Bateman-HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_I Toroidal functions section 3.13 page 173 :
- I. S. Gradshteyn and I. M. Riyzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Fourth (English) Edition section 8.85 Toroïdal Functions (page 1053)

Valable pour μ *entier* $= 0,1,2$

$$P_\nu^\mu(Cosh(\eta)) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \frac{Sinh(\eta)^\mu}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi d\theta \, \frac{Sin^{2\mu}(\theta)}{(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta))^{\nu+\mu+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^\mu}{2\pi} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{Cos(\mu\theta)}{(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta))^{\nu+1}}$$

$$P_{n-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta)) = \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \frac{Sinh(\eta)^m}{2^m\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi d\theta \, \frac{Sin^{2m}(\theta)}{(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta))^{n+m+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\pi} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{Cos(m\theta)}{(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta))^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta)) = (-1)^m \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty dt \, \frac{Cosh(mt)}{(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cosh(t))^{n+\frac{1}{2}}} =$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{Log\left(Cotanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)} dt \, Cosh(mt)(Cosh(\eta)-Sinh(\eta)Cosh(t))^{n-\frac{1}{2}} \quad n \geq m$$

- Lebedev "Special Functions and their applications"
- I. S. Gradshteyn and I. M. Riyzhik, "Tables of Integrals, Series and Products", Fourth (English) Edition section, 8.712, 8.715 (page 1002)

$$P_\nu^\mu\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{\sqrt{2}Sinh^\mu(\eta)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_0^\eta dt\,\frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(Cosh(\eta)-Cosh(t)\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}\quad \eta>0\quad \mathrm{Re}(\mu)<\frac{1}{2}$$

$$Q_\nu^\mu\left(Cosh(\eta)\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{i\mu\pi}Sinh^\mu(\eta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}\int_\eta^{+\infty} dt\,\frac{e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t}}{\left(Cosh(t)-Cosh(\eta)\right)^{\mu+\frac{1}{2}}}\quad \eta>0\quad \mathrm{Re}(\mu)<\frac{1}{2}\quad \mathrm{Re}(\mu+\nu)>-1$$

$$P_\nu\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\eta dt\,\frac{Cosh\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(Cosh(\eta)-Cosh(t)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$P_\nu\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\,\frac{1}{\left(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta)\right)^{\nu+1}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{1}{\left(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta)\right)^{\nu+1}}$$

$$P_\nu\left(Cosh(\eta)\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\,\left(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta)\right)^{\nu}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta\,\left(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cos(\theta)\right)^{\nu}$$

$$Q_\nu\left(Cosh(\eta)\right)=\int_0^\infty d\theta\,\frac{1}{\left(Cosh(\eta)+Sinh(\eta)Cosh(\theta)\right)^{\nu+1}}$$

- I. S. Gradshteyn and I. M. Riyzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Fourth (English) Edition section 8.7145 (page 1002) et 8.742 (page 1007)
- Lebedev section 7.1.

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\left(z^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\pi dt\,\left(z+\sqrt{z^2-1}Cos(t)\right)^{\nu-\mu}Sin^{2\mu}(t)\quad \mathrm{Re}(z)>0\quad \mu=0,1,2,\ldots$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\pi\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi dt\,\left(z+\sqrt{z^2-1}Cos(t)\right)^{\nu}Cos(\mu t)\quad \mathrm{Re}(z)>0\quad \mu=0,1,2,\ldots$$

$$\mu=0\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Rightarrow P_\nu\left(Cos(\theta)\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\vartheta dt\,\frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\left(Cos(t)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$Cos(\nu\pi)P_\nu\left(Cos(\theta)\right)-\frac{2}{\pi}Sin(\nu\pi)Q_\nu\left(Cos(\theta)\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\vartheta^\pi dt\,\frac{Cos\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(t-\pi)\right)}{\left(Cos(\theta)-Cos(t)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\nu=n-\frac{1}{2}\Rightarrow Cos(\nu\pi)=0\quad Sin(\nu\pi)=-(-1)^n$$

$$P_{n-\frac{1}{2}}\left(Cos(\theta)\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\vartheta dt\,\frac{Cos(nt)}{\left(Cos(t)-Cos(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{n-\frac{1}{2}}\left(Cos(\theta)\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\int_\vartheta^\pi dt\,\frac{Cos\left(n(t-\pi)\right)}{\left(Cos(\theta)-Cos(t)\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\vartheta^\pi dt\,\frac{Cos(nt)}{\left(Cos(\theta)-Cos(t)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

- Lebedev "Special Functions and their applications", section 7.10 formule 7.10.10
- I. S. Gradshteyn and I. M. Riyzhik, "Tables of Integrals, Series and Products", Fourth (English) Edition section 8.712, 8.715
- Louis Robin 1959, Fonctions-Sphériques-de-Legendre-et-Fonctions-Sphéroidales Tome III, page 113

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{i\mu\pi}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(z^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}} \int_{-1}^{1} dt \, \frac{\left(1-t^2\right)^\nu}{(z-t)^{(\nu+\mu+1)}} \quad \mathrm{Re}(\nu+\mu) > -1 \quad \mathrm{Re}(\mu) > -1 \quad |\arg(z \pm 1)| < \pi$$

$$\mu = m \quad \nu = l - \frac{1}{2}$$

$$z = Cosh(\eta)$$

$$Q_{l-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta)) = \frac{e^{im\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)} \left(Sinh(\eta)\right)^m \int_{-1}^{1} dt \, \frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}$$

$$t = Cos(\theta)$$

$$Q_{l-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta)) = \frac{e^{im\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)} \left(Sinh(\eta)\right)^m \int_{0}^{\pi} d\theta \, \frac{Sin(\theta)^{2l}}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}$$

$$Q_{l-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta)) = \frac{e^{im\pi}}{\sqrt{2\pi}} \left(Sinh(\eta)\right)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \int_{0}^{\pi} d\theta \, \frac{Cos(l\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$Comme \quad e^{im\pi} = (-1)^m \quad pour\ m\ entier$$

$$Q_{l-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \left(Sinh(\eta)\right)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \int_{0}^{\pi} d\theta \, \frac{Cos(l\theta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

Autres représentations intégrales des fonctions de Legendre de degré demi-entier.

Référence :
- Lebedev "Special Functions and their applications", section 7.10 formule 7.10.10
- I. S. Gradshteyn and I. M. Riyzhik, "Tables of Integrals, Series and Products", Fourth (English) Edition section 8.712, 8.715
- Louis Robin 1959, Fonctions-Sphériques-de-Legendre-et-Fonctions-Sphéroidales Tome III, page 113
- S.C.Loh, 1959 « The Calculation of Electric Potential and the Capacity of a Tore by means of Toroidal functions » formule (6) page 699

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{i\mu\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(z^2-1\right)^{\frac{\mu}{2}}\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\left(1-t^2\right)^\nu}{(z-t)^{(\nu+\mu+1)}}\quad \mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1\quad \mathrm{Re}(\mu)>-1\quad \left|\arg(z\pm1)\right|<\pi$$

Partons de la formule précédente en posant :

$$\mu=m\quad \nu=l-\frac{1}{2}$$

$$z=Cosh(\eta)$$

Puis réalisons une intégration par partie :

$$Q_{l-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta))=\frac{e^{im\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}\left(Sinh(\eta)\right)^m\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}$$

$$Q_{l-\frac{1}{2}}^m(Cosh(\eta))=\frac{e^{im\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)}\left(Sinh(\eta)\right)^m\int_{0}^{\pi}d\theta\,\frac{Sin(\theta)^{2l}}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\theta)\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}$$

.

La première intégration par partie donne :

$$\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}\to u'=\frac{1}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}\quad et\quad v=\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}$$

$$\to u=\frac{-1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l-1}}$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}=\frac{-1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)}\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\frac{d}{dt}\left(\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l-1}}+\frac{-1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)}\left[\frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l-1}}\right]_{-1}^{1}$$

$$\left[\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1}=0\Rightarrow\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}}=\frac{-1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)}\int_{-1}^{1}dt\,\frac{\frac{d}{dt}\left(\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l-1}}$$

$$De\,même\left[\frac{d^p}{dt^p}\left(\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right)\right]_{-1}^{1}=0\quad pour\ p=1,l-1$$

En itérant (l-1) fois de plus cette intégration par partie, et avec le résultat de la ligne précédente, il vient :

$$\int_{-1}^{1} dt \frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}} = \frac{(-1)^l}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(m+\frac{1}{2}+l-2\right)...\left(m+\frac{1}{2}+l-l\right)} \int_{-1}^{1} dt \frac{\frac{d^l}{dt^l}\left(\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l-l}}$$

$$= \frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(m+\frac{1}{2}+l-2\right)...\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^l\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^l}{dt^l}\left(\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

Formule de Rodrigues pour les pôlynomes de Tchebychev

$$(-1)^l\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d^l}{dt^l}\left(\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}\right) = (2l-1)(2l-3)...\times 1\times T_l(t)$$

$$Si\ t = Cos(\vartheta) \Rightarrow T_l\left(Cos(\vartheta)\right) = Cos(l\vartheta)$$

$$\int_{-1}^{1} dt \frac{\left(1-t^2\right)^{l-\frac{1}{2}}}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}+l}} = \frac{(2l-1)(2l-3)...\times 1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(m+\frac{1}{2}+l-2\right)...\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{T_l(t)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{e^{im\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(Sinh(\eta)\right)^m \frac{(2l-1)(2l-3)...\times 1}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(m+\frac{1}{2}+l-2\right)...\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{T_l(t)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{e^{im\pi}}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)} \left(Sinh(\eta)\right)^m \frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{3}{2}\right)...\times\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(m+\frac{1}{2}+l-2\right)...\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{T_l(t)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$Comme\ \Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right) = \left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{3}{2}\right)...\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(l+m+\frac{1}{2}\right) = \left(m+\frac{1}{2}+l-1\right)\left(m+\frac{1}{2}+l-2\right)...\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

Il vient

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{e^{im\pi}}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \left(Sinh(\eta)\right)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{T_l(t)}{\left(Cosh(\eta)-t\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$Posons\ t = Cos(\vartheta) \quad dt = -Sin(\vartheta)d\vartheta = -\sqrt{1-t^2}\,d\vartheta \Rightarrow -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = d\vartheta$$

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = -\frac{e^{im\pi}}{\sqrt{2\pi}} \left(Sinh(\eta)\right)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \int_{\pi}^{0} d\vartheta \frac{T_l\left(Cos(\vartheta)\right)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^{m+\frac{1}{2}}} \quad T_l\left(Cos(\vartheta)\right) = Cos(l\vartheta)$$

$$\Rightarrow Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{e^{im\pi}}{\sqrt{2\pi}} \left(Sinh(\eta)\right)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \int_{0}^{\pi} d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^{m+\frac{1}{2}}} \quad cqfd$$

$$Comme \quad e^{im\pi} = (-1)^m \quad pour\ m\ entier$$

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \left(Sinh(\eta)\right)^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \int_{0}^{\pi} d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{\left(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta)\right)^{m+\frac{1}{2}}}$$

A partir de la représentation avec les polynômes de Tchebychev, on obtient également :

Pour m entier

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{(-1)^m}{2^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}(Sinh(\eta))^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{T_l(t)}{(Cosh(\eta)-t)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$Posons\ t=Sin(\vartheta)\quad dt=Cos(\vartheta)d\vartheta=\sqrt{1-t^2}\,d\vartheta\Rightarrow\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=d\vartheta$$

$$T_l(z)=Cos(lCos^{-1}(z))\quad T_l(z)=Cos\left(\frac{\pi\, l}{2}\right)Cos(l\ Sin^{-1}(z))+Sin\left(\frac{\pi\, l}{2}\right)Sin(l\ Sin^{-1}(z))$$

$$\Rightarrow T_l(Cos(\vartheta))=Cos(l\vartheta)\quad T_{2l}(Sin(\vartheta))=(-1)^l Cos(2l\vartheta)\quad T_{2l+1}(Sin(\vartheta))=(-1)^l Sin((2l+1)\vartheta)$$

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\vartheta\frac{T_l(Sin(\vartheta))}{(Cosh(\eta)-Sin(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow Q^m_{2l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{(-1)^{l+m}}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\vartheta\frac{Cos(2l\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Sin(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow Q^m_{2l+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{(-1)^{l+m}}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\vartheta\frac{Sin((2l+1)\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Sin(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

.

La formule est également valable avec les indices m entiers négatifs :

$$Q^{-m}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))=\frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{(Sinh(\eta))^m}\int_0^{\pi}d\vartheta\,Cos(l\vartheta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m-\frac{1}{2}}$$

Comme

$$P^{-m}_{\nu}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P^m_{\nu}(z)\Rightarrow P^{-m}_{l-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+m\right)}P^m_{l-\frac{1}{2}}(z)$$

$$Q^{-m}_{\nu}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q^m_{\nu}(z)\Rightarrow Q^{-m}_{l-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{l-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow Q^m_{l-\frac{1}{2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}-m\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{(Sinh(\eta))^m}\int_0^{\pi}d\vartheta\,Cos(l\vartheta)(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m-\frac{1}{2}}$$

A partir de la relation pour m entier :

$$Q^{m}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$
.

et en partant de m=0, puis par dérivation sur le paramètre η, on arrive aux résultats suivants :

$$Q^{0}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{1}{2}}} \quad Q^{1}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = -Sinh(\eta)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dQ^{0}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{d\eta} = Sinh(\eta)Q^{(1)}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = -Sinh(\eta)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow Sinh(\eta)Q^{(1)}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = Q^{1}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

$$Q^{(m)}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{1}{Sin(\eta)}\frac{d}{d\eta}\left(\cdots\frac{1}{Sin(\eta)}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{Sin(\eta)}\frac{d}{d\eta}\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow Q^{(m)}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = (-1)^m(2m-1)!!\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{(-1)^m 2^m}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\forall m\ Q^{m}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(-1)^m 2^m}{\sqrt{\pi}} Sinh^m(\eta)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow Q^{m}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = Sinh^m(\eta)Q^{(m)}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$

.

On a également pour la dérivée première de la fonction toroïdale de première espèce :

$$P^{1}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = Sinh(\eta)P^{(1)}_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))$$
.

Autres intégrales dérivées de la formule pour m entier :

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

Il vient :

$$Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2m)}{2^{2m-1}\Gamma(m)} = \frac{\sqrt{\pi}(2m-1)!}{2^{2m-1}(m-1)!} \quad m>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q^0_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{1}{2}}} \\ Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{2(-1)^m}{2^m}(Sinh(\eta))^m \frac{(2m-1)!}{(m-1)!}\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{1}{2}}} = Q^0_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \qquad \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)+2Cos(\vartheta))^{\frac{1}{2}}} = (-1)^l Q^0_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Sin(\theta)Sin(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = lQ_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \qquad \int_0^\pi d\vartheta \frac{Sin(\theta)Sin(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)+2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = lQ_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Sin(\theta)Sin(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos((l-1)\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} - \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos((l+1)\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}\right\} \\
\Rightarrow \int_0^\pi d\vartheta \frac{Sin(\theta)Sin(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2Sinh(\eta)}\left\{Q^1_{l+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) - Q^1_{l-\frac{3}{2}}(Cosh(\eta))\right\} \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(\theta)Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos((l+1)\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} - \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos((l-1)\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}\right\} \\
\Rightarrow \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(\theta)Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2Sinh(\eta)}\left\{Q^1_{l-\frac{3}{2}}(Cosh(\eta)) - Q^1_{l+\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\right\} \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{Q^1_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Sinh(\eta)} \qquad \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)+2Cos(\vartheta))^{\frac{3}{2}}} = (-1)^{l+1}\frac{Q^1_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{Sinh(\eta)} \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{\frac{5}{2}}} = -\frac{Q^2_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{3Sinh^2(\eta)} \qquad \int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)+2Cos(\vartheta))^{\frac{5}{2}}} = (-1)^l\frac{Q^2_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{3Sinh^2(\eta)} \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)-2Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}} = Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\frac{2^m}{2(-1)^m Sinh^m(\eta)}\frac{(m-1)!}{(2m-1)!} \\
\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(l\vartheta)}{(2Cosh(\eta)+2Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}} = Q^m_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))\frac{2^m}{2(-1)^{m+l} Sinh^m(\eta)}\frac{(m-1)!}{(2m-1)!}
\end{cases}$$

.

Quelques développement en série utilisant les fonctions toroïdales, dans le cadre de l'inverse des distances en coordonnées cylindriques 3D

Ce que nous avons nommé la « partition de l'unité

$$1 = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + \sum_{n=1,+\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + \sum_{n=1,+\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)\right)$$

Le développement de la solution élémentaire (une fonction de Green) pour les problèmes d'électrostatique :

En coordonnées cylindriques axiales $\mathbf{r}(\rho,\vartheta,z) \quad \mathbf{r}(\rho',\vartheta',z')$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2+\rho'^2+(z-z')^2-2\rho\rho' Cos(\vartheta-\vartheta')}$$

$$\beta = \frac{\rho^2+\rho'^2+(z-z')^2}{2\rho\rho'} \Rightarrow |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{2\rho\rho'}\sqrt{\beta - Cos(\vartheta-\vartheta')} \quad \beta > 1$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(Q_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

Démonstration

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{2\rho\rho'}}\frac{1}{\sqrt{\beta-Cos(\vartheta-\vartheta')}} \quad \textit{Posons} \quad \beta = Cosh(\eta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\vartheta-\vartheta')}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + \sum_{n=1,+\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta-Cos(\theta)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q_{-\frac{1}{2}}(\beta) + \sum_{n=1,+\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n\vartheta)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{2\rho\rho'}}\frac{1}{\sqrt{\beta-Cos(\theta)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(Q_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n\vartheta)\right)$$

.

Partons maintenant de la formule plus générale :

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(Sinh(\eta))^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_0^\pi d\vartheta \frac{Cos(n\vartheta)}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\textit{Développement en série de Fourier de } \frac{1}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(Cosh(\eta)-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m}{(Sinh(\eta))^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q^m_{n-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))Cos(n\vartheta)\right)$$

$$\beta = Cosh(\eta) \Rightarrow Sinh(\eta) = \sqrt{\beta^2-1} \Rightarrow (Sinh(\eta))^m = (\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\beta-Cos(\vartheta))^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m}{(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n\vartheta)\right)$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{2\rho\rho'}\sqrt{\beta - Cos(\vartheta-\vartheta')} \Rightarrow |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m+1} = (2\rho\rho')^{m+\frac{1}{2}}(\beta - Cos(\vartheta-\vartheta'))^{m+\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m+1}} = \frac{1}{(2\rho\rho')^{m+\frac{1}{2}}}\frac{1}{(\beta - Cos(\vartheta-\vartheta'))^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m+1}} = \frac{(-1)^m}{2^m(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}(\rho\rho')^{m+\frac{1}{2}}}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\pi(\rho\rho')^{\frac{1}{2}}}\left(Q^0_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q^0_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\frac{1}{\pi\sqrt{\beta^2-1}(\rho\rho')^{\frac{3}{2}}}\left(Q^1_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} = \frac{(-1)^m}{3\pi(\beta^2-1)(\rho\rho')^{\frac{5}{2}}}\left(Q^2_{-\frac{1}{2}}(\beta) + 2\sum_{n=1,+\infty} Q^2_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

Formules avec les puissances positives de la distance :

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m+1}}=\frac{(-1)^m}{2^m(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}(\rho\rho')^{m+\frac{1}{2}}}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)+2\sum_{n=1,+\infty}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m\to -m\Rightarrow\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-2m+1}}=\frac{(-1)^m}{2^{-m}(\beta^2-1)^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\sqrt{\pi}(\rho\rho')^{-m+\frac{1}{2}}}\left(Q^{-m}_{-\frac{1}{2}}(\beta)+2\sum_{n=1,+\infty}Q^{-m}_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$Q^{-m}_{n-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(z)\quad Q^{-m}_{-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{-\frac{1}{2}}(z)$$

$$\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m-1}=\frac{2^m(\rho\rho')^{m-\frac{1}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\sqrt{\pi}}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m-1}=\frac{2^m(\rho\rho')^m(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\rho\rho'}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m-1}=\frac{2^m(\rho\rho')^{m-\frac{1}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)\sqrt{\pi}}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=1\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\frac{4\sqrt{\rho\rho'}\sqrt{\beta^2-1}}{\pi}\left(Q^1_{-\frac{1}{2}}(\beta)-2\sum_{n=1,+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=2\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3=\frac{48(\rho\rho')^{\frac{3}{2}}(\beta^2-1)^2}{\pi}\left(\frac{Q^2_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{9}+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{1}{(4n^2-9)(4n^2-1)}Q^2_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=3\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5=\frac{64(\rho\rho')^{\frac{5}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\left(\frac{Q^3_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{15}-2\sum_{n=1,+\infty}\frac{15}{(4n^2-25)(4n^2-9)(4n^2-1)}Q^3_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

En introduit la notation du bi-factoriel, bien la manipulation du bi-factoriel soit plus délicate en général que celle de la fonction Gamma, nous obtenons

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m-1}=\frac{2^m(\rho\rho')^m(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\rho\rho'}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}\left(Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)=2^{-m}\prod_{l=1}^{l=m}(2m+1-2l)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{-m}(2m-1)!!\sqrt{\pi}\qquad\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)=\frac{(-1)^m2^m}{(2m-1)!!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^m2^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi}$$

$$(2m-1)!!=\prod_{l=1}^{l=m}(2m+1-2l)=\prod_{l=1}^{l=m}(2l-1)$$

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}=\prod_{l=1}^{l=2m}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}+m-l\right)}=2^{2m}\prod_{l=1}^{l=2m}\frac{1}{(2n+1+2(m-l))}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}=\prod_{l=1}^{l=2m}\left(\frac{1}{2}+m-l\right)=2^{-2m}\prod_{l=1}^{l=2m}(1+2(m-l))$$

$$\Rightarrow\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}=2^{-2m}\prod_{l=1}^{l=2m}(2n+2m+1-2l)=\prod_{l=1}^{l=m}(2n+2m+1-2l)\prod_{l=m+1}^{l=2m}(2n+2m+1-2l)$$

$$\prod_{l=1}^{l=m}(2n+2m+1-2l)=\frac{(2n+2m-1)!!}{(2n-1)!!}\qquad\prod_{l=m+1}^{l=2m}(2n+2m+1-2l)=\prod_{l=1}^{l=m}(2n+1-2l)=\frac{(2n-1)!!}{(2n-2m-1)!!}$$

$$Puisque\ (2n-2m-1)!!=\prod_{l=1}^{l=n-m}(2n-2m+1-2l)=\prod_{l=m+1}^{l=n}(2n+1-2l)=\frac{\prod_{l=1}^{l=n}(2n+1-2l)}{\prod_{l=1}^{l=m}(2n+1-2l)}=\frac{(2n-1)!!}{\prod_{l=1}^{l=m}(2n+1-2l)}$$

$$\Rightarrow\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-m\right)}=2^{-2m}\frac{(2n+2m-1)!!}{(2n-2m-1)!!}\qquad\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}=\frac{\frac{(-1)^m2^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi}}{2^{-m}(2m-1)!!\sqrt{\pi}}=\frac{(-1)^m2^{2m}}{((2m-1)!!)^2}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m-1}=2^{2m}\frac{(\rho\rho')^m(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(\frac{Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{(2m-1)!!}+2(-1)^m(2m-1)!!\sum_{n=1,+\infty}\frac{(2n-2m-1)!!}{(2n+2m-1)!!}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

Vérifions qu'il n'y a pas d'erreur :

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{2m-1} = 2^{2m}\frac{(\rho\rho')^m(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}(2m-1)!!}{\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(\frac{Q^m_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{((2m-1)!!)^2}+2(-1)^m\sum_{n=1,+\infty}\frac{(2n-2m-1)!!}{(2n+2m-1)!!}Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=1\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = 4\frac{\sqrt{\rho\rho'}\sqrt{\beta^2-1}}{\pi}\left(Q^1_{-\frac{1}{2}}(\beta)-2\sum_{n=1,+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}Q^1_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=2\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3 = 48\frac{(\rho\rho')^{\frac{3}{2}}(\beta^2-1)}{\pi}\left(\frac{Q^2_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{9}+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)(4n^2-9)}Q^2_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=3\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5 = 64\frac{(\rho\rho')^{\frac{5}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\left(\frac{Q^3_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{15}-2\sum_{n=1,+\infty}\frac{15}{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}Q^3_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\right)$$

$$m=4\Rightarrow|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^7 = 256\frac{(\rho\rho')^{\frac{7}{2}}(\beta^2-1)^2}{\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(\begin{array}{l}\frac{Q^4_{-\frac{1}{2}}(\beta)}{105}+\\+2\sum_{n=1,+\infty}\frac{105}{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}Q^4_{n-\frac{1}{2}}(\beta)Cos(n(\vartheta-\vartheta'))\end{array}\right)$$

Quelques propriétés des fonctions coniques de Mehler

Fonctions coniques de Mehler de première et deuxième espèce, avec un argument purement réel allant de [1,+∞], fonctions intervenant sur des problèmes aux limites sur des hyperboloïdes à deux nappes (iso-surfaces du système sphéroïdal allongé ou prolat)

Voir l'ouvrage « W.Magnus.F.Oberhettinger.R.P.Soni-Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics », section 4.2, page 164.

Sur l'intervalle [1,+∞], on ne va utiliser qu'une unique formule de liaison pour les fonctions coniques de Mehler, elle ne concerne plus la détermination des valeurs des fonctions pour des arguments inverses, puisque l'intervalle est uniquement positif. Il s'agit donc plutôt de relier les fonctions de première et deuxième espèce.

$$\begin{aligned}
&Pour\ x \in [+1,+\infty] \\
&\forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C} \quad P_\nu^\mu(x) = P_{-\nu-1}^\mu(x) \\
&Pour\ \ x \in [+1,+\infty] \\
&P_\nu^{-\mu}(x) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{Cos(\nu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\left(Q_{-\nu-1}^\mu(x) - Q_\nu^\mu(x)\right) \\
&\nu = -\frac{1}{2} + i\tau \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{i\ Sinh(\tau\pi)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)}\left(Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x) - Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right) = \left|\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-i\tau\right)\right|^2 \\
&\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\mu}(x) = \frac{ie^{-\mu\pi i}}{Sinh(\tau\pi)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+i\tau\right)}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1) = -\frac{\pi}{Sin(\nu\pi)} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2 = -\frac{\pi}{Sin\left(\left(-\frac{1}{2}+i\tau\right)\pi\right)} = \frac{\pi}{Cosh(\tau\pi)}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(x) = \frac{i}{Sinh(\tau\pi)\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^0(x)\right) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^0(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}^0(x)\right)$$

.

Les valeurs des fonctions coniques de première espèce sont réelles en appliquant la formule miroir et la première formule de liaison sur les fonctions de première espèce

$$\left.\begin{aligned}
P_{\bar\nu}^\mu(x) &= \overline{P_\nu^\mu(x)} \\
P_\nu^\mu(x) &= P_{-\nu-1}^\mu(x)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x) = \overline{P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x)} = P_{-\frac{1}{2}-i\tau}^\mu(x) = \overline{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x)}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^\mu(x) \quad \text{à valeur réelle}$$

.

La fonction conique de deuxième espèce quant à elle est à valeur imaginaire et sa partie imaginaire est proportionnelle à la fonction de première espèce :

$x \in [1,+\infty)$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

Propriété miroir de Q

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \overline{Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)} \Leftrightarrow Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x) = \overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}$$

$$\Rightarrow P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{iCotanh(\tau\pi)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - \overline{Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)}\right) = -\frac{2Cotanh(\tau\pi)}{\pi}\operatorname{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = -\frac{\pi}{2}Tanh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$$

Donc comme auparavant dans l'intervalle [-1,+1] et pour des arguments réels, le choix d'une fonction indépendante de deuxième espèce, se réalise par exemple à partir de la partie réelle de de la fonction conique de deuxième espèce.

Certains auteurs comme par exemple dans l'article A.F.Ulitko « On a generalization of the integral transformation of Mehler-Fock », SOVIET APPLIED MECHANICS, Prikladnaya Mekhmnika, Vot. 3, No. 5, pp. 45-49, 1967», est introduit les deux fonctions de première et deuxième espèce :

$x = Cosh(\eta) \quad \eta \in [0,+\infty) \Rightarrow x \in [1,+\infty)$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = i\frac{Cotanh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right) \qquad L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right)$$

Que l'on relie immédiatement aux parties réelles et imaginaires des fonctions coniques de deuxième espèce, et qui démontre que les deux fonctions introduites sont bien à valeur réelle.

$$L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) + Q_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x)\right) = \frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi}\operatorname{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right)$$

$$\Rightarrow Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) = \frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}\left\{L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) - iSinh(\pi\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\}$$

$$\operatorname{Re}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = \frac{\pi}{2Cosh(\pi\tau)}L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \quad et \quad \operatorname{Im}\left(Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right) = -\frac{\pi}{2}Tanh(\tau\pi)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x).$$

Les Wronskiens de ces diverses solutions sont :

$$x \in [1,+\infty],\ \forall \mu \in \mathbf{R} \quad \forall \nu \in \mathbf{C} \quad W\left\{P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)\right\} = -e^{\mu\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow W\left\{P^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), Q^0_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} = \frac{1}{(1-x^2)} \Rightarrow W\left\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x), L_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\right\} = \frac{2Cosh(\pi\tau)}{\pi(1-x^2)}.$$

Développement en série et dérivées paramétriques de la fonction conique de Mehler de première espèce

Le développement en série de la fonction de Legendre suivant est également utilisé pour obtenir celui des diverses dérivées paramétriques :

$$P_\nu(z)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n=-\frac{Sin(\nu\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial\nu}=-\frac{Sin(\nu\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\{\psi(\nu+1+n)-\psi(\nu+1-n)\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial^2 P_\nu(z)}{\partial z\partial\nu}=\frac{Sin(\nu\pi)}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}n\frac{\Gamma(\nu+1+n)\Gamma(n-\nu)}{(n!)^2}\{\psi(\nu+1+n)-\psi(\nu+1-n)\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{n-1}$$

Ces développements en série sont valables autant dans l'intervalle [-1,+1], que sur l'intervalle [1,+∞]. Appliquées ces formules sur les fonctions coniques de Mehler, il vient :

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\tau\Rightarrow\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\nu}=-i\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}\Rightarrow\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=i\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\nu}\quad et\quad\frac{\partial^2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial z\partial\tau}=i\frac{\partial^2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial z\partial\nu}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)=\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\tau\right)}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n=\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}{(n!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=i\frac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}{(n!)^2}\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+i\tau+n\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+i\tau-n\right)\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$\frac{\partial^2 P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial z\partial\tau}=-i\frac{Cosh(\pi\tau)}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}n\frac{\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|^2}{(n!)^2}\left\{\psi\left(\frac{1}{2}+i\tau+n\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+i\tau-n\right)\right\}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{n-1}$$

Développement en série et dérivées paramétriques de la fonction conique de Mehler de deuxième espèce

Pour les fonctions Q de Legendre, on développe les dérivées premières du paramètre réel v selon les deux formules suivantes :

$$(F1)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial Q_\nu(z)}{\partial\nu}=\pi\dfrac{Cos(\pi\nu)}{Sin(\pi\nu)}Q_\nu(z)-\psi^{(1)}(\nu+1)P_\nu(z)-\\ -\dfrac{Sin(\pi\nu)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(n+\nu+1)}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\psi(n+1)-\psi(\nu+1)\right)\left(\psi(n+\nu+1)-\psi(n-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\end{cases}$$

$$(F2)\Rightarrow\begin{cases}A_\nu(z)=Sin(\pi\nu)\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\,n!}\left(\psi(n+\nu+1)-\psi(n-\nu)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\\ \dfrac{\partial Q_\nu(z)}{\partial\nu}=-\dfrac{\pi^2}{2}P_\nu(z)-\dfrac{Cos(\pi\nu)}{2Sin(\pi\nu)}A_\nu(z)+\dfrac{1}{2Sin(\pi\nu)}A_\nu(-z)\end{cases}$$

$$\forall\,\nu>0\in\Re,\nu\notin\mathbf{Z}\quad tel\ que\left|\frac{1-z}{2}\right|<1$$

où $(\alpha)_n$ *est le symbole de Pochhammer* $(\alpha)_n=\alpha\,(\alpha+1)\,\cdots(\alpha+n-1)=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(l)$ *fonction Gamma*

$\psi(\alpha)$ *fonction Digamma dérivée logarithmique de la fonction Gamma* $\Leftarrow\psi(\alpha)=\dfrac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

$\psi^{(1)}(\alpha)$ *dérivée première de la fonction Digamma*

Cela donne pour les fonctions coniques, les deux formules suivantes :

$$\nu=-\frac{1}{2}+i\tau\quad\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=i\frac{\partial Q_\nu(z)}{\partial\nu}\quad Cos(\pi\nu)=iSinh(\pi\tau)\quad Sin(\pi\nu)=-Cosh(\pi\tau)$$

$$(F1)\Rightarrow\left(\frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=\begin{cases}\pi\dfrac{Sinh(\pi\tau)}{Cosh(\pi\tau)}Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)-i\psi^{(1)}\left(\dfrac{1}{2}+i\tau\right)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)+\\ +i\dfrac{Cosh(\pi\tau)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)}{(n!)^2}\left(\dfrac{1}{2}Log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)+\psi(n+1)-\psi\left(\dfrac{1}{2}+i\tau\right)\right)\times\\ \times\left(\psi\left(n+\dfrac{1}{2}+i\tau\right)-\psi\left(n+\dfrac{1}{2}-i\tau\right)\right)\left(\dfrac{1-z}{2}\right)^n\end{cases}\end{cases}\right)$$

$$(F2)\Rightarrow\begin{cases}A_\tau(z)=Cosh(\pi\tau)\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)}{(n!)^2}\left(\psi\left(n+\frac{1}{2}-i\tau\right)-\psi\left(n+\frac{1}{2}+i\tau\right)\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\\ \dfrac{\partial Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)}{\partial\tau}=-\left\{\dfrac{Sinh(\pi\tau)}{2Cosh(\pi\tau)}A_\tau(z)+i\dfrac{1}{2Cosh(\pi\tau)}A_\tau(-z)+i\dfrac{\pi^2}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(z)\right\}\end{cases}$$

.